

VERSJON 25. OKTOBER
TMA 4195 Matematisk modellering
Høsten 2007
Modelleringsseminaret
Forslag til oppgaver

1 Innledning

Ett av modelleringsseminarene i 1996 dreide seg om populasjonsmodeller, og noe av det som kom ut av dette har blitt oppsummert i forelesningsnotatene. Siden seminaret var relativt vellykket, er det interessant å prøve samme tema på nytt, men naturligvis med et annet innhold. Nå har ikke biomatematikk blitt mindre omfattende i løpet av disse årene, og jeg har på ingen måte full oversikt over fagområdet. Manglende oversikt har forøvrig vært vanlig på modelleringsseminarene, men etter at seminaret er over, er det forbausende mye som vi tilsammen har fått ut av det.

Inst. for matematiske fag har hatt et bachelorprogram innenfor biomatematikk. Litt informasjon finner dere her:

- http://www.ntnu.no/ntnu_brochures/Biomatematikk.pdf

På Internett er Wikipedia et godt utgangspunkt for mer informasjon:

- <http://en.wikipedia.org/wiki/Biomathematics>

Etter å ha skimlet en håndfull anbefalte bøker innom fagområdet, er dette inntrykket som sitter igjen:

- Bøkene inneholder mange av de samme (idealisererte) situasjonene, gjerne behandlet på samme måte.
- Realismen i modellene er ikke alltid like klar. Ofte har en følelsen av at modellene konstrueres for å passe med ligningene, i stedet for omvendt.
- I bøkene er det lite håndfaste tallverdier på parametrene som går inn. Dette gjør det vanskelig å foreta en fornuftig vurdering av skalaer og dimensjonsløse parametre.
- Ved å føre inn mer realisme i modellene, blir de fort så kompliserte at numeriske eksperimenter blir nødvendig for å få innsikt i oppførselen.
- Det vil være nesten håpløst å lage oppgaver til seminaret som ikke er behandlet ett eller annet sted på Internett eller i lett tilgjengelige bøker.

Notatet inneholder sparsomt med referanser. Min hovedkilde har vært boka *Essential Mathematical Biology* av N.F. Britton. Det vil være naturlig at deler av boka kopieres og distribueres til de gruppene som benytter problemstillinger som står omtalt der (Har kopiert deler av boka på PDF-filer som kan sendes dem som ber om det på E-post). Merk at hjemmesida til forfatteren inneholder en stor trykkfeilsliste.

En annen omfattende bok er J. D. Murray: *Mathematical Biology*, Springer (1989). En nyere og omarbeidet utgave finnes som E-bok på biblioteket (men bare første bind av to). Hva gjelder spesielle analytiske løsninger for lineære og ikke-lineære ordinære og partielle diff.ligninger, er det ikke noe som slår Andrei D. Polyanin livsverk (se referansene)!

Så langt har jeg snakket med førsteamanuensis Jarle Tufto på IMF om konsulentbistand på seminaret, men det kan bli aktuelt også å konsultere andre biologer.

Som dere ser, er flere av oppgavene bare antydning i store trekk, og en kan naturligvis tenke seg mange ulike situasjoner som leder til de samme matematiske modellene. Her håper jeg dere kan hjelpe til med kreative løsninger, – og i dette seminaret må det være lov å være litt kreativ!

Tilslutt et lite hjertesukk om stokastiske modeller. Kurset vårt har dessverre ikke inneholdt noe statistisk modellering. Dette er i hovedsak på grunn av hvor mye stoff som vi kan presse inn. For studentene fra Industriell matematikk inneholder noen av statistikkfagene allerede en del stokastisk modellering (for eksempel Markov og autoregressive modeller), og de siste 20 – 40 årene det vært utstrakt interaksjon mellom stokastisk og deterministisk modellering. Dette kommer for eksempel klart fram for stokastiske prosesser der stokastiske fordelinger til prosessen er løsninger av partielle diffusjonslikninger. Sammenhengen mellom Brownsk bevegelse og diffusjonslikningen er klassisk. Flere av problemstillingene nedenfor kan med fordel trekke inn stokastiske elementer, og dette er det naturligvis ikke noe forbud mot.

2 Populasjonsdynamikk for enkeltarter med tidsforsinkelse

Forsinkelse i populasjonsmodeller er f.eks. relatert til drektighetstid. Allerede den logistiske ligningen oppfører seg uventet når veksten er avhengig av populasjonen en stund tilbake, og den enkle og ofte studerte modifikasjonen (Hutchinson's ligning)

$$\frac{dN}{dt}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau_0)}{K} \right), \quad (1)$$

vil kunne modifiseres på flere måter. Programpakken DDE23, som i dag er integrert i standardpakken for MATLAB, tillater flere ulike forsinkelser, og dette kunne brukes til å studere (tilnærmelser) til mer generelle formuleringer, for eksempel på formen

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_0^\infty k(\tau) N(t - \tau) d\tau \right) \quad (2)$$

(Etter å ha skrevet denne ned, fant jeg nøyaktig samme ligning i Britton, s. 27. Der står det også hvordan ligningen kan løses for tilfellet $k(t) = e^{-t/t_0}$.)

Rapporten som beskriver DDE23 (se referanselista) inneholder en rekke eksempler på bruk av forsinkelsesligninger innenfor biomatematikk, så det er vanskelig å komme opp med noe som ikke har blitt behandlet allerede.

Det ser imidlertid ikke ut til at noen av eksemplene har eksplisitt t -avhengighet på høyre side, selv om det ikke skulle være noe i veien å bruke det i algoritmen. Dette kunne gjøre det mulig å kombinere årstidsvariasjoner med tidsforsinkelse. Norske fjell er kjent for sine smånagervariasjoner (lemenår, musår). Kunne dette være noe å ta for seg? Ligninger med forsinkelsesledd er forøvrig rimelig ”sære”, så vær forberedt på overraskelser!

3 Populasjonsdynamikk for vekselvirkende arter

Lotka-Volterra modellen for rovdyr og byttedyr er ofte utgangspunktet, men som nevnt i forelesningsnotatet er ikke modellen spesielt realistisk, siden den sykliske oppførselen lett kan perturberes. Forsinkelser i Lotka-Volterramodeller har også blitt studert, og slike ligninger kan i motsetning ordinære ligninger faktisk ha *kaotisk* oppførsel. I forelesningsnotatet er det også antydning hvordan en kan studere hva fangst betyr for et Lotka-Volterra-system.

Det har som ventet blitt foreslått mange modifiseringer og generaliseringer av Lotka-Volterra-systemet. Med utgangspunkt i en logistisk modell for byttedyr, har en forsøkt å gi en mer realistisk modell for fangsten av byttedyr ved å føre inn en funksjon $\Phi(B)$ for hvor lett det er for rovdyr (R) å ta ut byttedyr (B). Dette leder til det som kalles Rosenzweig-MacArthur-modellen

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= r_B B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - R\Phi(B), \\ \frac{dR}{dt} &= r_R V\Phi(B) - \alpha R.\end{aligned}\tag{3}$$

Andre generaliseringer modeller som på en eller annen måte forsøker å gi mer realisme til Lotka-Volterra-modellen betegnes som *Gause's prey-predator model* og *Leslie's model*. For et prosjekt vil det også være mulig å studere ulike modifikasjoner, innføre flere vekselvirkende habitater, eller ta for seg situasjoner som vi kjenner fra dagliglivet, media etc.

4 Kjemisk reaksjonskinetikk i molekylærbiologi

Molekylærbiologi er som navnet sier biologi på molekylnivå, og her studeres kinetikken for kjemiske prosesser som foregår inne i celler. Dette er reaksjoner som ofte skjer ved bruk av enzymer, og det ser ut til at Michaelis-Menton-reaksjonen fra Lin & Segel (Kap. 10) representerer et slags basiseksempel. Både Britton og Murray inneholder ulike generaliseringer av dette eksemplet. Kapittel 6 i Britton gir en innføring i problemområdet og inneholder oppgaver som kan bygges videre ut til et prosjekt.

Oppgave 6.5 kunne være interessant å studere i så måte. Dette handler om aerobisk energiproduksjon gjennom splitting av glykose, altså mekanismen som skaffer energi til intensiv aktivitet over korte distanser (Gå inn på *Metabolic pathway* i Wikipedia for å se at det vi snakker om til daglig ikke er riktig så enkelt!). En forenklet versjon av ligningene burde kunne analyseres tilsvarende til det vi gjorde på forelesningene. Dessverre ser det ut for meg som om ligningene i Britton er feil, så første steg ville måtte bli å finne ut av det.

5 Spredning av Kongekrabbe langs Norskekysten

Ifølge Wikipedia ble kongekrabben satt ut i Murmanskfjorden av sovjetiske forskere på 1960-tallet for å øke verdigrunnlaget for befolkningen i Murmansk. Krabben holder naturlig til i det nordlige Stillehavet rundt Kamtsjatka-halvøya i det østligste Sibir og kan bli omkring 15 kg og 1,80 m i diameter i våre farvann. Fra Murmansk har krabben spredt seg vestover til kysten utenfor Finnmark og Troms, og det er mulighet for at utbredelsen vil fortsette nedover kysten. Det er delte meninger om krabben egentlig er en ressurs eller en plage.

Denne oppgaven går altså ut på å modellere Kongekrabbens utbredelse langs norskekysten og tar utgangspunkt i løsningen til en eksamensoppgave i Mat. mod. fra 2002. Siden dette var en eksamensoppgave, var det nødvendig å forenkle modelleringen slik at den var løsbart. I seminaret er det mulighet til å bringe noe mer realisme inn i modelleringen.

En lokal krabbepopulasjon, $K(t)$, kan for eksempel modelleres som en modifisert logistisk modell,

$$\frac{dK}{dt} = rK \left(1 - \frac{K}{M}\right) \left(\frac{K}{m} - 1\right), \quad 0 < m < M. \quad (4)$$

Populasjonen vil vokse kun hvis

$$m < K < M, \quad (5)$$

og det er enkelt å vise at 0 og M er stabile, mens m er et ustabilt likevektspunkt. Hvis bestanden er mindre enn m , vil den dø ut.

En forenklet modell, som også omfatter fiskere, $F(t)$, har etter skalering formen

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{F}{2} + KF, \quad (6)$$

$$\frac{dK}{dt} = K(1 - K) - F, \quad (7)$$

og dette systemet er identisk med det som ble satt opp for elgjakt (og analysert i øving 5, 2007). I modellierungsseminarer kunne en for eksempel undersøke egenskapene til systemet hvis den mer realistiske modellen i ligning 4 legges til grunn.

For å modellere kongekrabbenes spredning vestover langs Finnmarkskysten kan en anta at de sprer seg ved "tilfeldig gang", slik at fluksen er $\mathbf{j}^* = -D\nabla^*\rho^*$, der $\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ er tettheten (antall krabber pr. flateenhet). Den lokale formeringen kunne en anta skjer etter modellen ovenfor, eller en forenklet logistisk modell,

$$q(\mathbf{x}^*, t^*) = r\rho^*(\mathbf{x}, t) \left[1 - \frac{\rho^*(\mathbf{x}, t)}{\rho_{\max}}\right]. \quad (8)$$

Hvis vi da ser bort fra fangst, leder dette til Fishers diffusjons/reaksjonsligning

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (-D\nabla^*\rho^*) - r\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*) \left[1 - \frac{\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*)}{\rho_{\max}}\right]. \quad (9)$$

Ved passende skalaer (tidskala $T = r^{-1}$, og en tilhørende romlig skal bestemt av diffusjon, $X = \sqrt{Dr^{-1}}$) får ligningen standardformen

$$\rho_t = \nabla^2 \rho + \rho(1 - \rho). \quad (10)$$

Ligning 10 har konstante løsninger $\rho_0 = 0$ og $\rho_1 = 1$ og stabiliteten sjekkes ved å føre inn løsninger på formen

$$\rho(x, t) = \rho_j + a(t) \exp(ikx), \quad j = 0, 1, |a| \ll 1. \quad (11)$$

Mens ρ_1 er stabil, vil en se at ρ_0 kan være ustabil overfor ”langbølgede” forstyrrelser.

Det kan vises at lign. 10 også har løsning i form av en *vandrende front*,

$$\rho(x, t) = \left(1 + \exp \left(\sqrt{\frac{1}{6}} x - \frac{5}{6} t \right) \right)^{-2}. \quad (12)$$

Hastigheten på fronten (som her er en konstant) kan oppfattes som utbredeshastigheten. For å anslå denne i fysiske enheter, var det i oppgaven gitt at

$$r = 0.3 \text{år}^{-1}. \quad (13)$$

Dermed er det mulig å anslå at fronten passerer et fast punkt x_0 , dvs. går fra 1% av maksimum populasjon til 99% av maksimum populasjon i løpet av 15år. Tror nok at tidsskalaen ($1/r$) var valgt slik at vi kommer ut med en rimelig verdi.

Denne modellen, som kombinerer logistisk vekst og migrasjon, er temmelig standard, men det må være mulig å raffinere den.

6 Algeoppblomstring

Plankton i havet utgjør et komplisert marint økosystem som også har blitt beskrevet som et bytte og rovdyrssystem. Plankton deles grovt inn i 2 grupper, planteplankton (phytoplankton) og dyreplankton (zooplankton). Små alger er eksempel på planteplankton, mens dyreplankton omfatter for eksempel vannlopper og hoppekreps. Dyreplankton er viktig mat for fisk.

Planteplankton tar opp nitrogen fra vannmassene og eksisterer på grunn av fotosyntesen. Dyreplankton lever av planteplankton.

Felles for alle typer plankton er at de stort sett følger vannmassenes bevegelser passivt og påvirker ikke sin egen bevegelsesretning, selv om noen grupper dyreplankton har evnen til å stige eller synke i vannet.

Planteplankton trenger næringsstoffer, og det er spesielt nitrogen som er viktig. Ved at dyreplankton spiser planteplankton tilføres også disse nitrogen. Nitrogen frigjøres i sin tur fra vannmassene når plankton dør og råtner.

Et forenklet system som beskriver samspillet mellom plante- (P), dyreplankton (Z) og nitrogen, N , er følgende ikke-lineære system for konsentrasjonene i det aktive overflatelaget

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \gamma NP - \delta PZ - \alpha P, \\ \frac{dZ}{dt} &= \delta PZ - \beta Z, \\ \frac{dN}{dt} &= \alpha P + \beta Z - \gamma NP. \end{aligned} \quad (14)$$

Britton skriver ligningene som et lukket system, men i vårt tilfelle vil det være snakk om nitrogentilførsel fra landbruket som føres ut i havet i perioder med stor nedbør. Siden planteplankton avhenger av innstrålingen fra sola, vil en for eksempel kunne forvente en årlig variasjon i faktoren γ . Realistiske størrelser på parametrene og dermed tidsskalaene som ligger inne i systemet er ikke kjent, men bør være mulig å finne.

7 Kontinuerlige og diskrete modeller for artsmigrasjon

Arter som begynner å bevege seg (migrere) utover i landskapet blir ofte modellert ved hjelp av ”diffusjon”. Hvis vi lar populasjonstettheten beskrives av $\rho(\mathbf{x}, t)$ i en logistisk vekstmodell, får vi som vist ovenfor for Fishers ligning,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = r\rho(1 - \rho) + \sigma \nabla^2 \rho. \quad (15)$$

Med unntak av noen få enkle analytiske løsninger, som for eksempel den vandrende tetthetsfronten, må ligningen løses numerisk.

I Fishers originale ligning er diffusjonskoeffisienten konstant, men en kan godt tenke seg at dette ikke uten videre er realistisk. For små populasjoner bør trangen til å diffundere også være liten. Hva skjer hvis diffusjonskoeffisienten σ , for eksempel er proporsjonal med ρ^a , $a > 0$? Dette er kort behandlet for diffusjonsligningen i forelesningsnotatet om bevarelsesprinsipper, avsnitt 5.6. Hvordan det blir for Fishers ligning har jeg ikke sjekket, men har sett det behandlet i litteraturen.

Diffusjonsleddet som både er uavhengig av tiden og homogent med hensyn på retningen kan neppe være spesielt realistisk. Hvis en ønsker å holde seg til ordinære ligninger, er det mulig å betrakte en endelig samling habitater der veksten i hver habitat er logistisk hver for seg, men hvor det foregår migrasjon i et nettverk mellom habitatene. Dette tilsvarer situasjonen med en semi-diskretisering i planet av ligning 15, og denne diskrete varianten bør oppvise tilsvarende egenskaper som selve ligningen.

Ytterligere en generalisering vil være å dele populasjonen inn i aldersklasser. I biomatematik er denne typen modellering gjerne diskrete med et konstant tidssteg, og beskrevet ved hjelp av en matrise (såkalte *Lesliematriser*) som bringer en gitt aldersfordeling over til en ny aldersfordeling. Havforskningsinstituttet benytter en slik beskrivelse for modellering av fiskebestandene rundt Norskekysten.

8 Spredning av epidemier i et inhomogent landskap

Det har vært utført en omfattende modellering av epidemier fra infeksjonssykdommer. Her er det naturlig å dele befolkningen (N) inn i mottagelige, S (*Susceptible*) og infiserte, I (*Infected*). Avhengig av sykdomsformen, kan det deretter finnes en befolkningsgruppe som er ferdige med sykdommen, dvs. er døde eller immune, eller de går tilbake til S -gruppen. Hvis de ikke går tilbake til S -gruppen, er det vanlig å betegne slutt-tilstanden med R (*Removed*). Vi har med andre ord en utvikling

$$S \rightarrow I \rightarrow R. \quad (16)$$

Siden det ikke er urimelig at antall smittede pr. tidsenhet kan skrives på formen rSI , vil epidemien kunne modelleres som

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -rIS, \\ \frac{dI}{dt} &= rIS - aI, \\ \frac{dR}{dt} &= aI\end{aligned}\tag{17}$$

Modeller med disse tre klassene kalles SIR-modeller. Legg forøvrig merke til at

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0,\tag{18}$$

slik at det totale antallet $N = S + I + R$ er konstant. Britton inneholder ulike modifikasjoner til denne enkle modellen, og her kunne en for eksempel se på hvordan en effektivt kan introdusere vaksinasjonsprogrammer. Det er også mulig å studere hvordan inkubasjonstiden virker inn i modellen.

Hvordan sprer så en epidemi seg? Murray diskuterer en modell som etter skalering har formen

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -IS + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= IS - \gamma I + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{19}$$

Denne kan vises å ha løsninger i form av en vandrende *solitær bølge* av infiserte individer, men er det f.eks. rimelig at syke individer diffunderer på samme måten som friske? (solitær bølge = en enkelt bølgetopp som beveger seg framover med konstant hastighet uten å endre form). Det ser ut til lign. 19 også er brukt som modell for spredning av rabies, men at det da er de friske revene som holder seg i ro, mens de infiserte diffunder utover. Også denne situasjonen ser ut til å gi en vandrende bølge av infiserte rever.

Igjen synes det litt for primitivt å bruke enkel diffusjon. I alle fall for det tradisjonelle Norge der folket bor i trange daler med så godt som ingen kontakt over fjellet. Det kunne være interessant å se hvordan epidemien arter seg i en slik inhomogen situasjon.

9 Modellen for jordas befolkning

Modellen som ble diskutert i forelesningene hadde formen

$$\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right) - c \int_{-\infty}^t N(s) ds, \quad c > 0.\tag{20}$$

(Har mistet referansen, men det får vi finne fram igjen).

Her bør det være mulig å studere en mer generell modell, for eksempel

$$\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{N_m} \right) - c \int_{-\infty}^t k(t-s) N(s) ds,\tag{21}$$

og ellers kanskje dele total befolkning opp i vekselvirkende regioner. Hva med tilgangen på vann?

10 Optimal ressursforvaltning

Vi skal ta for oss optimal ressursforvaltning, og illustrerer dette med fiske på en enkelt fiskeart (eller mer dramatisk, hvalfangst!). Modellen kan senere generaliseres etter behov. Uten fangst følger populasjonen en logistisk-lignende modell

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (22)$$

der $F(x)$ for den logistiske modellen er gitt ved

$$F(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right). \quad (23)$$

(Bilder blir forøvrig mer litt mer interessant hvis F ikke er konkav overalt, men har et konvekst område nede ved $x = 0$). Generelt kan både r og K være funksjoner av t .

Vi antar at fangsten pr. tidsenhet $Y(t)$ kan uttrykkes som

$$Y(t) = qEx(t),$$

hvor E for eksempel er antall båter som deltar i fisket, og q uttrykker hvor effektivt fisket er. Også E og q kan avhenge av tiden. Med fangst inkludert i lign. 22, blir dynamikken bestemt av

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - Y(t), \quad (24)$$

og som vist i forelesningsnotatet, vil dette føre til en endret likevektsløsning så lenge størrelsene som inngår er konstante. Vi ser lett at den positive (stabile) likevektsløsningen blir

$$x^* = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right), \quad (25)$$

så lenge

$$E < \frac{r}{q}. \quad (26)$$

Dermed kan vi skrive

$$Y(E) = qKE \left(1 - \frac{qE}{r}\right). \quad (27)$$

Det maksimale bærekraftige uttaket får vi med en innsats slik at $x^* = K/2$.

Fangsten kan selges for en enhetspris p , slik at inntekten blir

$$P_{inn} = pY(E). \quad (28)$$

Nå vil det også koste å delta i fisket, og en enkel modell for dette vil være å sette

$$P_{ut} = cE, \quad (29)$$

der c er prisen for å utruste en båt. I det lange løp bør derfor

$$P_{inn} - P_{ut} = pY(E) - cE > 0. \quad (30)$$

Både utgiftene og inntektene kan naturligvis modelleres betydelig mer komplisert, men i det lange løp kan en forvente at fangsten innstiller seg slik at $P_{inn} \approx P_{ut}$ hvis det er fritt fiske: Nye aktører vil etablere seg så lenge det økonomiske utbyttet fra fiske er større enn kostnadene (inkludert det aktørene taper ved å ikke å drive med andre ting, såkalte "opportunity costs"). Dermed øker E til fisket blir nesten ulønnsomt. Personer med lave opportunity costs (altså de som ikke har noe bedre å holde på med) vil drive med fiske i denne situasjonen.

Hvis vi antar likhet, modifiseres problemet vårt til

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qEx(t), \quad (31)$$

$$pqEx(t) - cE = 0. \quad (32)$$

Begge disse ligningene vil være oppfylt for

$$E^* = \frac{r}{q} \left(1 - \frac{c}{pqK}\right), \quad x^* = \frac{c}{pq}. \quad (33)$$

Dette er altså en kombinert likevekt som både bringer inn populasjonsdynamikk og økonomi. For at det i det hele tatt skal bli aktuelt med fiske, må naturligvis

$$c < pqK. \quad (34)$$

Mer generelt vil en forvente at antallet båter ikke innstiller seg momentant i følge 32, men at denne må erstattes med en "innsvingningsligning" med tidsskala β^{-1} ,

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\beta [pqE(t)x(t) - cE(t)]. \quad (35)$$

Når det gjelder uttrykket for fangst, ser det ut til at en også velger mer generelle uttrykk på formen

$$Y(t) = qG(x)E(t).$$

Hvis vi deretter trekker ut $Y(t)$ fra hakeparentesen, kan vi skrive

$$pY(t) - cE = [p - c(x(t))]Y(t),$$

der

$$c(x(t)) = \frac{c}{G(x(t))}$$

kan oppfattes som en kostnad pr. fangstenhet. Dermed kan vi uttrykke fortjenesten pr tidsenhet ved tiden t som

$$[p - c(x(t))]Y(t), \quad (36)$$

og følgelig blir den totale fortjenesten i perioden $[0, T]$,

$$Q_{tot} = \int_0^T [p - c(x(t))] Y(t) dt. \quad (37)$$

Spørsmålet er nå hvordan en styrer innsatsen $E(t)$ og dermed $Y(t) = qE(t)x(t)$ slik at Q_{tot} maksimeres. I tråd med økonomisk praksis bør en diskontere til nå-verdi, dvs. optimalisere

$$Q_{tot} = \int_0^T e^{-\delta t} [p - c(x(t))] Y(t) dt. \quad (38)$$

Dette er som en forstår skisse til en undersøkelse. Materialet er hentet fra boka til C.W. Clark.

Referanser

- [1] Britton, N.F.: *Essential Mathematical Biology*, Springer-Verlag, London – Berlin – Heidelberg, 2003.
- [2] Clark, C. W.: *Mathematical Bioeconomics, The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 2005.
- [3] Murray, J.D.: *Mathematical Biology*, Springer Biomathematics, Vol. 19, 1993.
- [4] Murray, J.D.: *Mathematical Biology 1, An introduction*, 3rd Ed, Interdisciplinary applied mathematics 17, Springer, 2002. **E-bok.** (Bind 2 finnes ikke på NTNU)
- [5] Polianin, A. D. og V. F. Zaitsev: *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, 2004. **E-bok.**
- [6] Polianin, A. D.: *The World of Mathematical Equations*, <http://eqworld.ipmnet.ru/>.
- [7] Shampine, L.F. & S. Thompson: *Solving Delay Differential Equations with DDE23*, <http://www.runet.edu/~thompson/webddes/tutorial.pdf>