1 Første ordens, kvasilineære partielle diff.ligninger

- *første orden* = bare deriverte opptil første orden forekommer
- *kvasi-lineær* = ligningen er lineær i de første-deriverte
- *partiell* = løsningen er en funksjon av flere enn én uavhengig variabel

Teorien nedenfor er illustrert for en variabel z som avhenger av to uavhengige variable, x og y, $z = z(x, y)$, men er helt generell.

Normalformen:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

- $P, Q,$ og R avhenger ikke av $\frac{\partial z}{\partial x}$ eller $\frac{\partial z}{\partial y}$!
- $\partial z/\partial x$ og $\partial z/\partial y$ opptrer kun i første potens

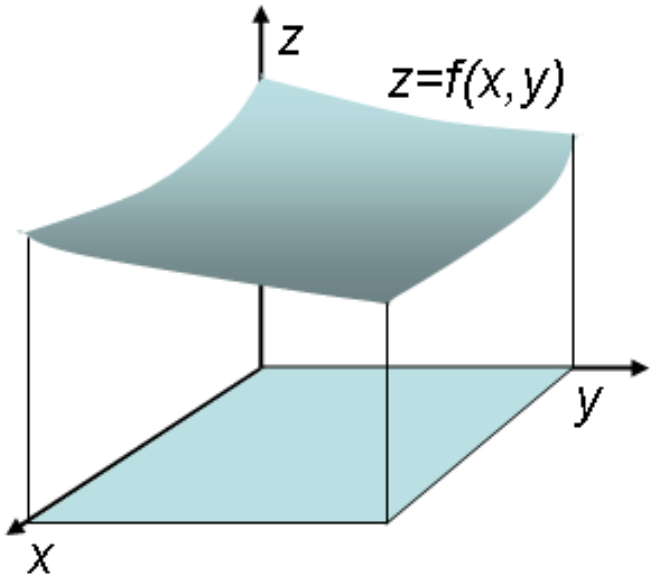
En løsning av ligning 1 er en funksjon

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

slik at

$$P(x, y, f(x, y))\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + Q(x, y, f(x, y))\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - R(x, y, f(x, y)) = 0. \tag{3}$$

Funksjonen $z = f(x, y)$ definerer ei *flate i* $\mathbb{R}^3$.



Observasjon 1:

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, -1\right] \tag{4}$$

er en *normalvektor* til flata.

Observasjon 2:

$$\mathbf{V}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]. \tag{5}$$

representerer et *vektorfelt*.

Observasjon 3:

Strømlinjene til vektorfeltet, $\mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)]$, er løsninger av

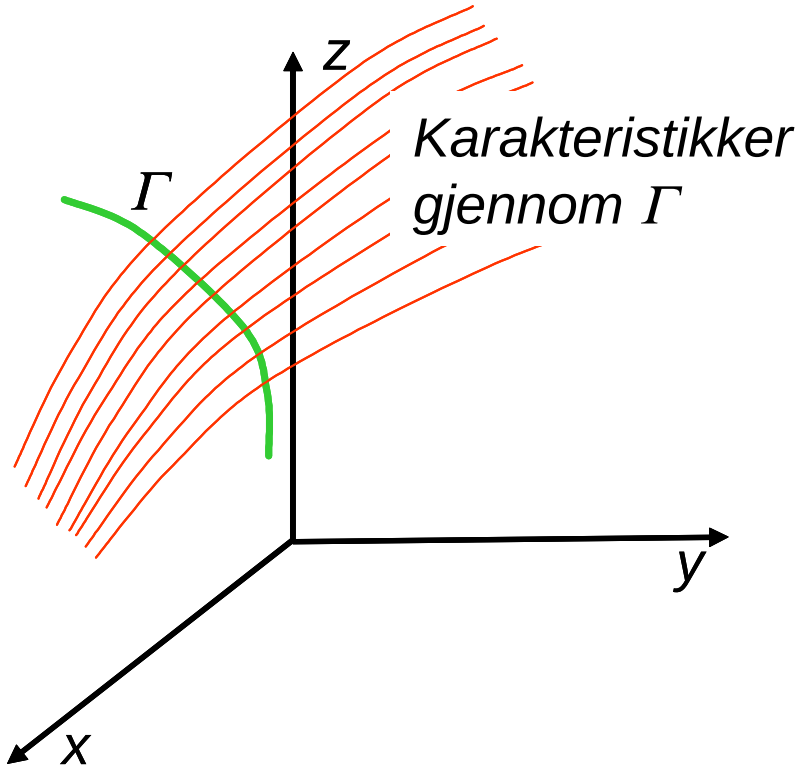
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{V}(x,y,z), \tag{6}$$

eller utskrevet,

$$\frac{dx}{ds} = P(x,y,z), \ \frac{dy}{ds} = Q(x,y,z), \ \frac{dz}{ds} = R(x,y,z).$$

Observasjon 4: *Normalvektorene til en løsning av ligning* 1 *står ortogonalt på strømlinjene til vektorfeltet* $\mathbf{V}$ *definert i ligning* 5:

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = [P,Q,R]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right] = P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - R(x,y,f(x,y)) = 0! \tag{7}$$



I teorien for partielle diff.-ligninger kalles strømlinjene for *karakteristikker.*

2 Cauchyproblemet

Gitt en romkurve Γ *i* $\mathbb{R}^3$*. Finn en funksjon* $z = f(x, y)$ *som tilfredsstiller ligning* 1 *og som er slik at* Γ *ligger i flata definert av løsningen.*

Spesialtilfeller:

- Deler av Γ er selv en karakteristikk (Løsningen er da ikke nødvendigvis fullt ut bestemt)
- Det fins funksjoner $f(x, y)$, *singulære løsninger*, slik at vi allerede har

$$P(x, y, f(x, y)) = Q(x, y, f(x, y)) = R(x, y, f(x, y)) = 0.$$

2.1 Eksempel

Løs ligningen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \tag{8}$$

som går gjennom romkurven

$$\mathbf{r}(t) = -\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},\ t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Vi bestemmer karakteristikkene:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x, \\ \frac{dy}{ds} &= y, \\ \frac{dz}{ds} &= 1, \end{aligned} \tag{10}$$

dvs,

$$\begin{aligned} x(s) &= C_1 e^s, \\ y(s) &= C_2 e^s, \\ z(s) &= s + C_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Anta karakteristikkene krysser romkurven for $s = 0$. Da må

$$\begin{aligned} C_1 &= -1, \\ C_2 &= 2t, \\ C_3 &= t^2, \end{aligned} \tag{12}$$

Løsningen blir definert parametrisk av

$$\begin{aligned} x &= -e^s, \\ y &= 2te^s, \\ z &= s + t^2, \end{aligned} \tag{13}$$

for $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.
I dette spesielle tilfellet er det også mulig å eliminere s og t:

$$s = \ln(-x), \tag{14}$$

$$t = -\frac{y}{2x}. \tag{15}$$

Hvis vi setter dette inn i siste ligning, får vi

$$z = \ln(-x) + \left(\frac{y}{2x}\right)^2. \tag{16}$$