

LØSNINGER TIL ENKLE, ENDIMENSJONALE BEVARELSESLOVER

Bevarelsesloven

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x,t) dx + j(\rho(b,t)) - j(\rho(a,t)) = 0$$

leder til differensialformuleringen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dj(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

som er en første orden, kvasilineær part.differensialligning der

$$P(t, x, \rho) = 1$$

$$Q(t, x, \rho) = c(\rho)$$

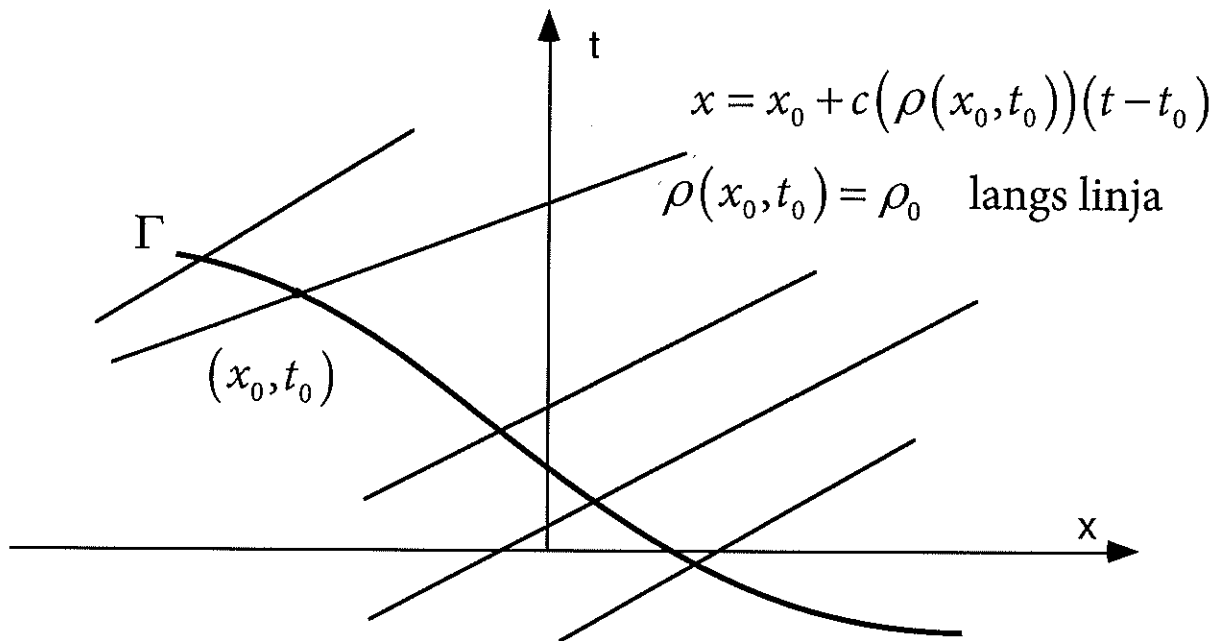
$$R(t, x, \rho) = 0$$

Karakteristikkene

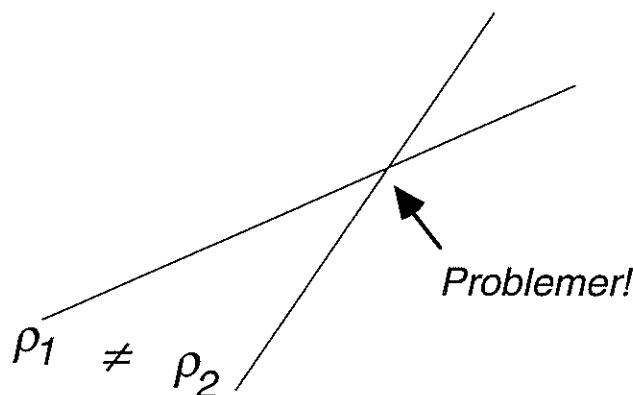
$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= P(t, x, \rho) = 1 \\ \frac{dx}{ds} &= Q(t, x, \rho) = c(\rho) \\ \frac{d\rho}{ds} &= R(t, x, \rho) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t &= t_0 + s \\ x &= x_0 + c(\rho_0)s \\ \rho &= \rho_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + c(\rho_0)(t - t_0) \\ \rho &= \rho_0 \end{aligned} \right.$$

- Karakteristikkene er rette linjer!
- ρ er konstant langs karakteristikkene!

Her vil en ofte nøye seg med å tegne opp projeksjonen av karakteristikkene i (x, t) -planet:

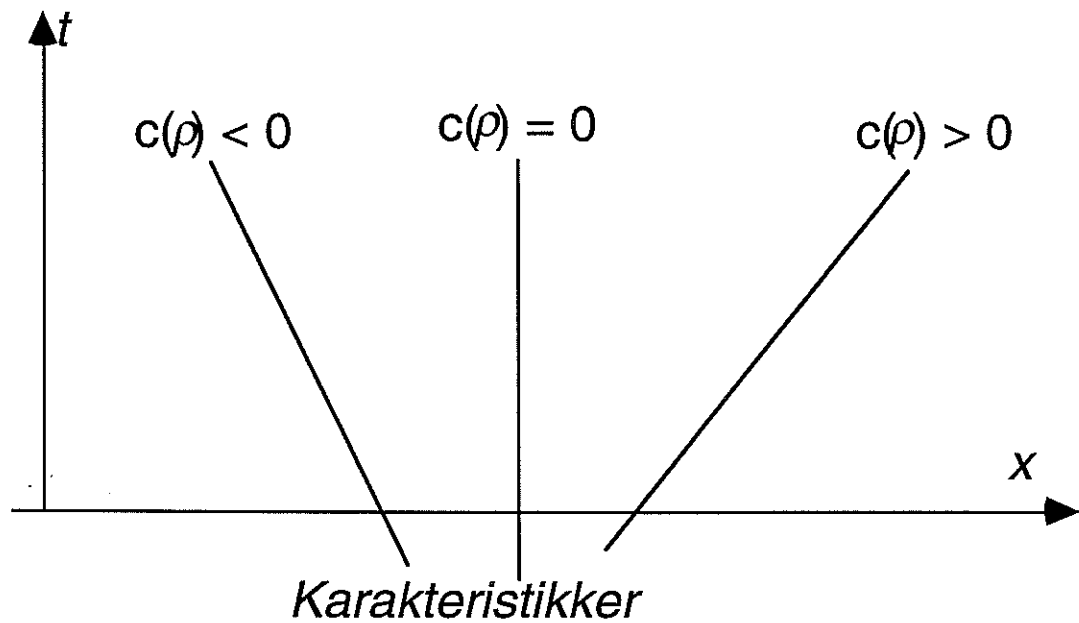


Matematisk er det ingen ting i veien med løsninger som “folder seg” slik at vi får flere mulige verdier på ρ i et punkt (x, t) , men *fysisk* er en slik situasjon uakseptabel. Dette skjer når (projeksjonen av) karakteristikkene kolliderer:



Vi ønsker løsninger som er forenlige med bevarelsesloven ligningen kommer fra!

$c(\rho)$ kalles *kinematisk hastighet*



$$x = x_0 + c(\rho(x_0, t_0))(t - t_0)$$

Løsningen i punktet (x_1, t_1) er

$$\rho(x_1, t_1) = \rho(x_0, t_0)$$

der

- $(x_0, t_0) \in \Gamma$
- $x_1 = x_0 + c(\rho(x_0, t_0))(t_1 - t_0)$

Implisitt,- krever generelt løsning av en ikke-lineær ligning!

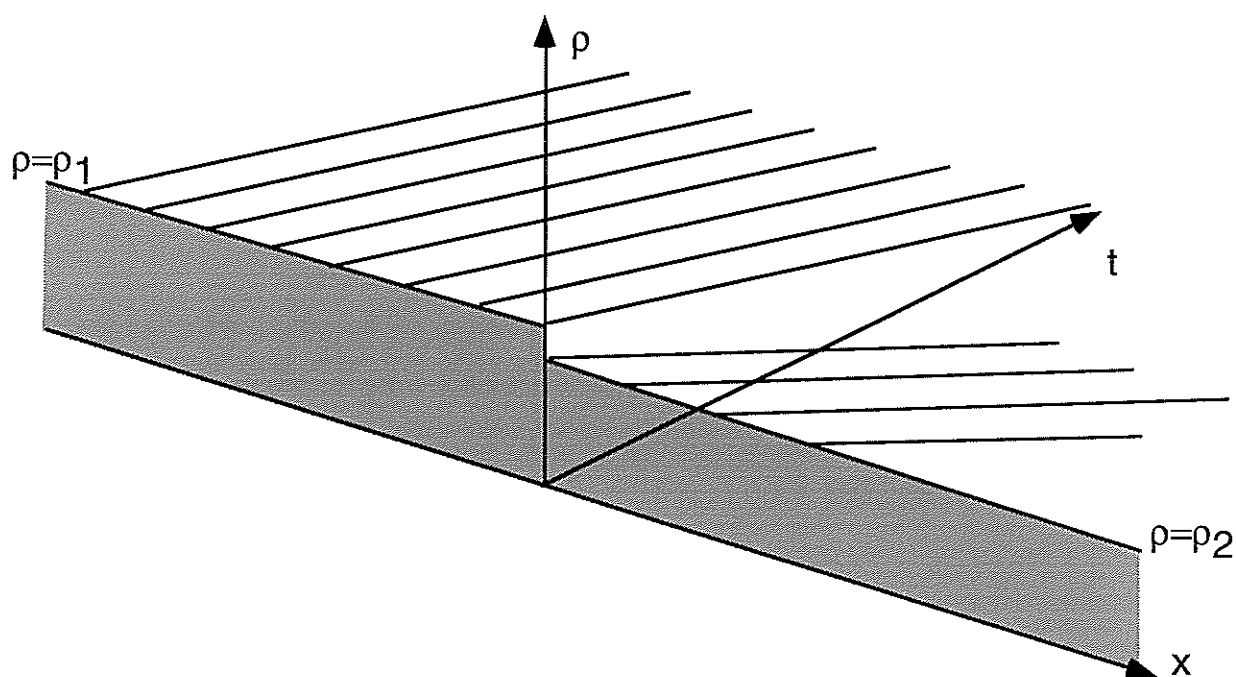
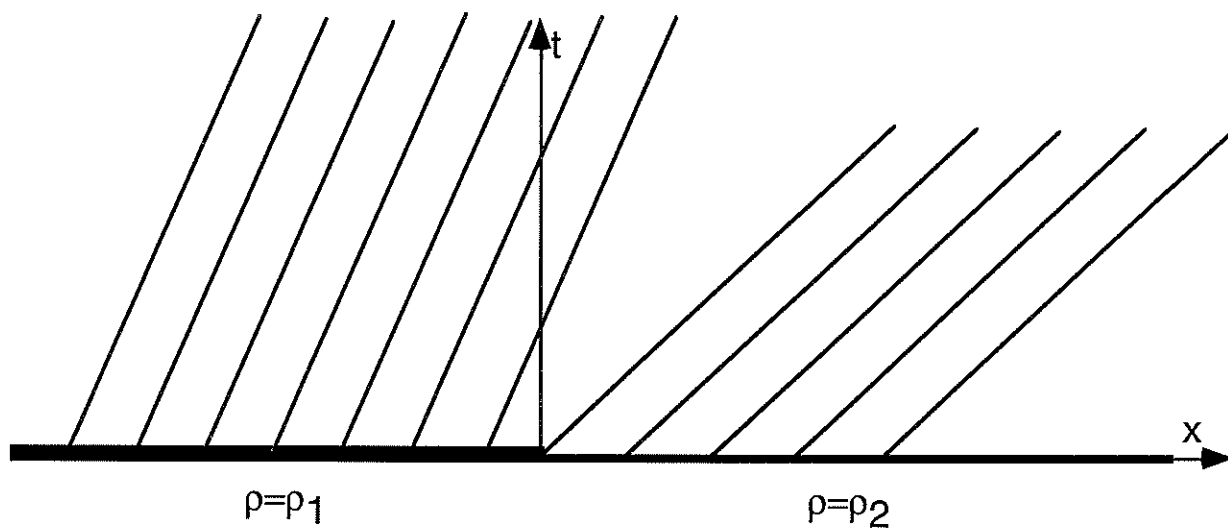
RIEMANNPROBLEMET

Finn løsningen, $\rho(x,t)$, $t \geq 0$, av $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ når

$$\rho(x,0) = \rho_1, x < 0$$

$$\rho(x,0) = \rho_2, x > 0$$

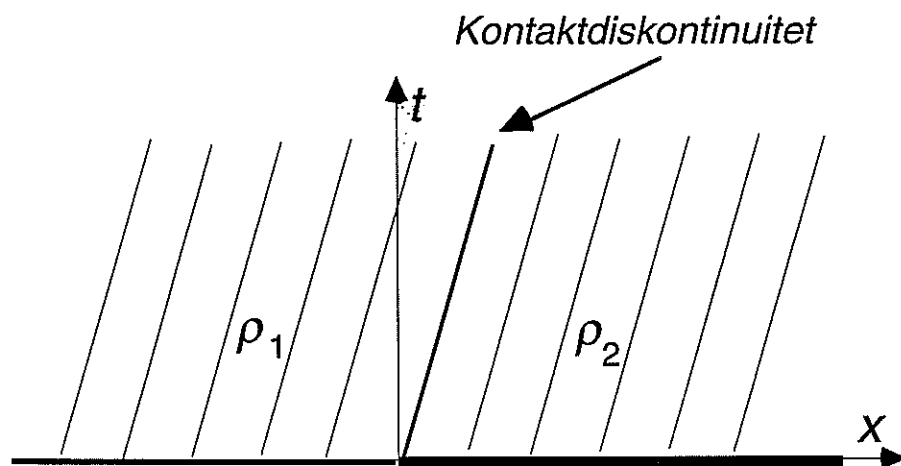
- og som er forenlig med bevarelsesloven!



DE TRE ELEMENTÆRE TILFELLENE

1. KONTAKTDISKONTINUITET

$$c(\rho_1) = c(\rho_2) = \frac{j(\rho_2) - j(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$$



(Betingelsen på differensialkvotienten blir forklart under tilfelle 3)

Eksempel:

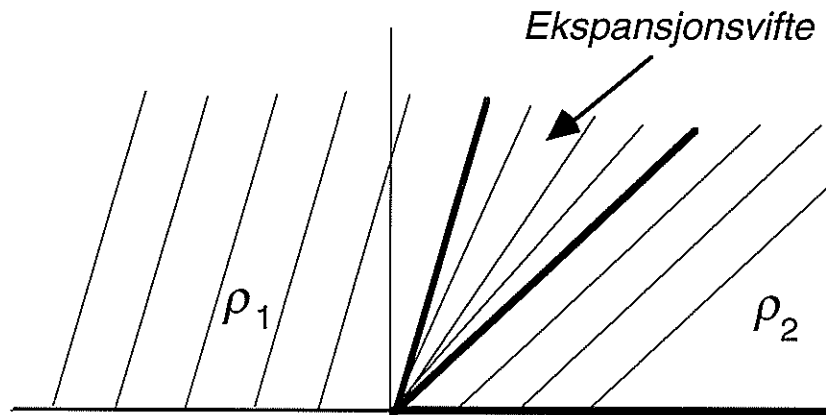
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \Rightarrow c(\rho) \equiv 1$$

Karakteristikkene er $x = x_0 + 1 \cdot t$, og derfor får vi

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - t)$$

2. EKSPANSJONSVIFTE

$c(\rho_1) < c(\rho_2)$ og $c(\rho)$ *monoton* (voksende eller avtagende) for ρ mellom ρ_1 og ρ_2 .



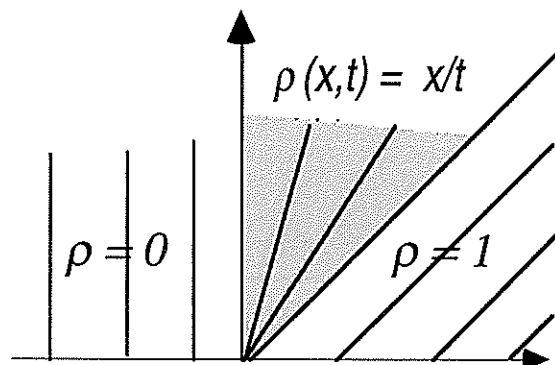
Alle karakteristikkene i viften begynner i origo, dvs. de har ligningen $x = c(\rho)t$. Dermed blir

$$\rho(x, t) = c^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$$

(c^{-1} eksisterer når c er monoton!)

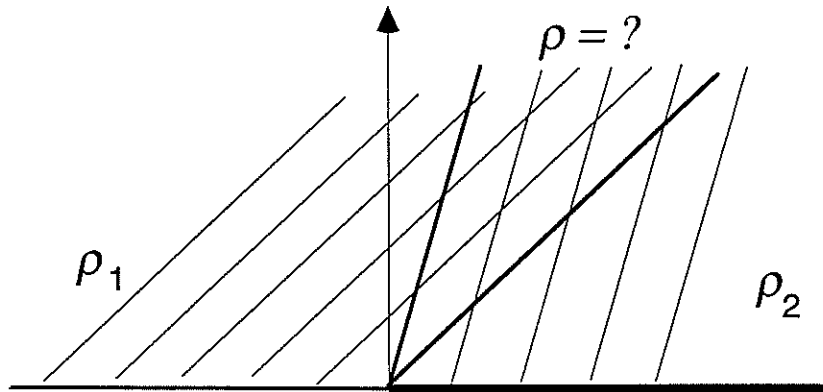
Eksempel:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \& \quad \begin{cases} \rho(x, 0) = 0, & x < 0 \\ \rho(x, 0) = 1, & x > 0 \end{cases}$$



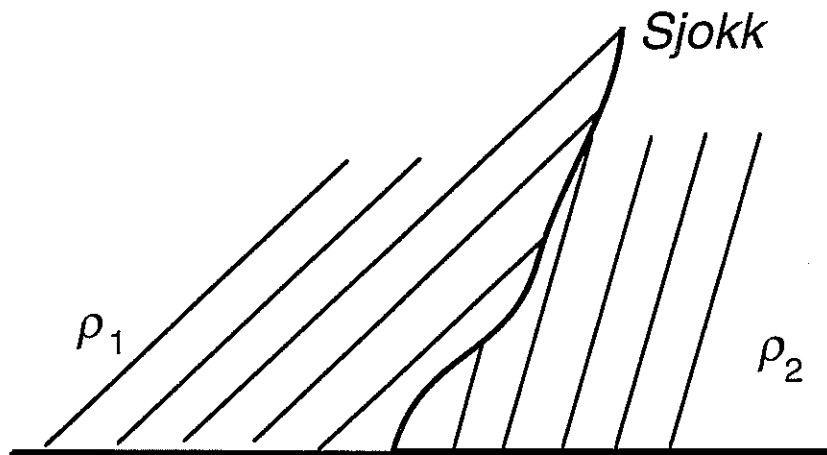
3. SJOKK

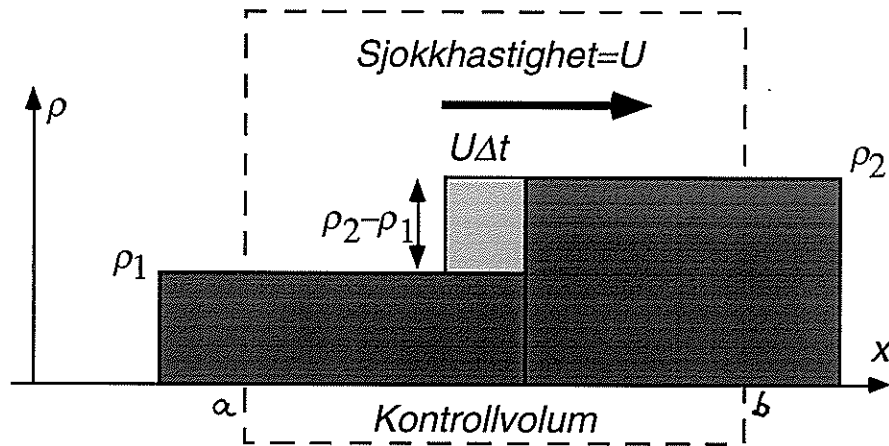
$$c(\rho_1) > c(\rho_2)$$



Det er umulig å finne en akseptabel løsning uten å bruke bevarelsesloven!

Løsningen krever at vi fører inn en *diskontinuitet*, - et sjokk.





Direkte beregning:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x,t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-(\rho_2 - \rho_1)U\Delta t}{\Delta t} = -(\rho_2 - \rho_1)U$$

Innsatt i bevarelsesloven:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x,t) dx + j(\rho_2) - j(\rho_1) &= \\ -U(\rho_2 - \rho_1) + j(\rho_2) - j(\rho_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{U = \frac{j(\rho_2) - j(\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)}}$$

Bevarelsesloven *krever* at alle sjokk må tilfredsstille denne ligningen!

Observasjon: Hvis $c(\rho)$ er kontinuerlig, vil

$$U = c(\rho_0), \quad \rho_0 \in \text{int}[\rho_1, \rho_2]$$

Eksempel:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^2 / 2)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \& \quad \begin{cases} \rho(x, 0) = 1, & x < 0 \\ \rho(x, 0) = 0, & x > 0 \end{cases}$$

OBS: Her må vi vite at fluksen har denne formen!

$$U = \frac{j(\rho_2) - j(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{0 - 1^2 / 2}{0 - 1} = \frac{1}{2}$$

