TMA 4195 Matematisk modellering,
30. november 2006
Løsning med kommentarer

1 Oppgave

Ei kokebok angir steketida for ovnstemperatur T_{ovn} til en kalkun på 3 kg til 3.5 time. For amerikansk kalkun på 10 kg er tida angitt til 7 timer.

(a) Hvordan utleder vi varmeledningsligningen

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T, \tag{1}$$

der tetthet, ρ, varmekapasitet, c, og varmeledningsevne, k, er konstante?

Vi antar at oppvarmingen av kalkunen følger ligning 1. Varmeoverføringen til kalkunen gjennom overflata skjer i følge Newtons varmeoverføringslov,

$$-k \nabla T|_{\text{overflate}} = \beta \left(T_{\text{ovn}} - T_{\text{overflate}} \right), \tag{2}$$

der β er en konstant.

(b) Steketida, t_s, må i tillegg til parametrene ovenfor, avhenge av kalkunens diameter D (vi antar at kalkuner er likeformede!), samt temperaturdifferansene mellom ovnen og kalkunen før (ΔT_0) og etter (ΔT_1) steking. Bruk dimensjonsanalyse til å finne et uttrykk for t_s (Vink: Kombinér parametrene i lign. 1 og 2 før du bruker dem i dimensjonsanalysen).

(c) Etter kort tid viser det seg at overflata på kalkunen har samme temperatur som ovnen. Dette betyr at lign. 2 forenkles til $T_{\text{ovn}} = T_{\text{overflate}}$, og parameteren med β forsvinner. Bruk denne opplysningen til å forenkle dimensjonsanalysen og vis at en da finner at t_s er proporsjonal med vekta av kalkunen opphøyd i potensen 2/3. Hvordan stemmer dette med kokeboka?

Løsning:

(a) Varmetetthet er gitt ved ρcT og varmefluksen er $\mathbf{j} = -k\nabla T$. Uten kilder har vi på integralform

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \rho cT \mathrm{d}V + \int_{\partial R} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma = 0,$$

og dette leder i sin tur, ved å flytte tidsderiverte innenfor integraltegnet, anvende divergensteoremet, og la R variere, til differensialformuleringen

$$\rho c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \nabla\cdot(-k\nabla T) = 0.$$

(b) Vi følger vinket i oppgaven (som tydeligvis ikke var så klart) og antar at

$$t_s = t_s\left(D, \kappa, \frac{\beta}{k}, \Delta T_0, \Delta T_1\right),$$

der varmediffusivitetskoeffisienten $\kappa = k/(\rho c)$.

Kommentar: En kunne tenke seg at $T_{\text{overflate}}$ og $\nabla T|_{\text{overflate}}$ skulle vært med, men disse størrelsene vil jo være tidsavhengige og bestemmes av selve beregningen av temperaturforløpet. Denne variasjonen er i sin tur bestemt av β/k og de andre parametrene.

Vi ser fra de oppgitte ligningene at $[\kappa] = \mathrm{s/m^2}$, mens $[\beta/k] = \mathrm{m^{-1}}$. Dermed kan vi sette opp dimensjonsmatrisen

	t_s	D	κ	β/k	ΔT_0	ΔT_1
m	0	1	-2	-1	0	0
s	1	0	1	0	0	0
K	0	0	0	0	1	1

Matrisen har rang 3 og følgelig finnes det tre dimensjonsløse kombinasjoner. Disse gir seg selv:

$$\pi_1 = \frac{\kappa t_s}{D^2},\ \pi_2 = \frac{D\beta}{k},\ \pi_3 = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_1},$$

og dermed blir $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3)$, eller

$$t_s = \frac{D^2}{\kappa}\Phi\left(\frac{D\beta}{k}, \frac{\Delta T_0}{\Delta T_1}\right).$$

Den alternative løsningen,

$$t_s = \frac{1}{\kappa\beta^2}\Phi\left(\frac{D\beta}{k}, \frac{\Delta T_0}{\Delta T_1}\right),$$

er naturligvis like riktig.

Men den aller mest elegante løsningen, som en av dere kom opp med, er imidlertid å skalere ligning 1 og 2 med D for lengde og t_s for tid. Da faller π_1 og π_2 rett ut!

(c) Hvis vi fjerner β, finner vi

$$t_s = \frac{D^2}{\kappa}\Phi\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_1}\right),$$

og siden vekta kan skrives

$$W = G\rho D^3$$

der G er en konstant dimensjonsløs "geometri-faktor", vil

$$t_s(3.5\text{kg}) = \frac{(W/G\rho)^{2/3}}{\kappa}\Phi\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_1}\right) \propto W^{2/3}.$$

Hvis steketia for en kalkun på 3kg er 3.5 time, burde etter dette, forutsatt at ΔT_0 og ΔT_1 er de samme, steketida for en kalkun på 10 kg være

$$t_s(10\text{kg}) = t_s(3\text{kg})\left(\frac{10}{3}\right)^{2/3} = 3.5\left(\frac{10}{3}\right)^{2/3}\text{time} = 7.8\text{ time}.$$

Dermed kan 7 timer være i knappeste laget.

2 Oppgave

Vi ser på problemet

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2t,\ 0 \leq t \leq 1,\ 0 < \varepsilon \ll 1,$$
$$y(0) = y(1) = 1.$$

Hva kaller vi slike problemer? Finn, til ledende orden i ε, en ytre, indre, og uniform løsning til problemet (Vink: Grensesjiktet ligger ved 0).

Løsning:

Siden dette er ei ligning med en liten parameter foran den høyeste deriverte, kalles dette et *singulært perturbert problem.*

Ytre løsning finnes ved å sette $\varepsilon = 0$. Da får vi

$$\frac{dy_0}{dt} = 2t,$$

med generell løsning $A + t^2$. Det er umulig å tilfredsstille begge randkravene, siden $y(0) = 1$ impliserer at $y_0(t) = 1 + t^2$, og $y(1) = 1$ impliserer at $y_0(t) = t^2$.

På grunn av vinket er det naturlig å prøve seg med en ny tidsskala, $t = \delta\tau$ nede ved 0, og dette leder til

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y_{\tau\tau} + \frac{1}{\delta} Y_\tau = 2\delta\tau.$$

Ved å velge $\delta = \varepsilon$ blir ligningen

$$Y_{\tau\tau} + Y_\tau = \varepsilon^2 2\tau,$$

med generell løsning til ledende orden, $Y_0(\tau) = A + Be^{-\tau}$ (En kunne tenke seg at $\delta = \varepsilon^{1/2}$ var en mulighet, men dette ville gitt en ligning $Y_{0\tau} = 0$, og det hjelper oss lite). Hvis vi tilfredsstiller randverdien $Y_0(0) = 1$, får vi derfor at $A + B = 1$, eller

$$Y_0(\tau) = 1 + A\left(e^{-\tau} - 1\right).$$

Nå vil faktisk denne løsningen tilfredsstille begge randkravene hvis vi setter $A = 0$, men da bruker vi Y_0 utenfor gyldighetsområdet.

Matching-kravet er på enkleste form gitt av

$$\lim_{t\to 0} y_0(t) = \lim_{\tau\to\infty} Y_0(\tau),$$

og dette leder til (vi benytter at $y_0(1) = 1$)

$$0 = 1 - A,$$

eller $A = 1$. Dermed blir uniform løsning til ledende orden

$$y_0^{(u)} = y_0(t) + Y_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - y_0(0) = t^2 + e^{-t/\varepsilon}.$$

Feilen ved $t = 1$ er helt neglisjerbar.

Tillegg (Ikke del av eksamen): Vi ser at eksakt generell løsning til ligningen blir

$$y_{ex}(t) = A + Be^{-\frac{t}{\varepsilon}} + t^2 - 2t\varepsilon,$$

og følgelig er, igjen med en neglisjerbar feil $\mathcal{O}\left(e^{-1/\varepsilon}\right)$,

$$y_{ex} = t^2 + e^{-t/\varepsilon} + 2\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - t\right).$$

Noen hadde tydeligvis oppfattet "til ledende orden i ε" som både $\mathcal{O}(1)$ og $\mathcal{O}(\varepsilon)$, så dette var ikke en helt bra formulering.

3 Oppgave

La $x^*(t^*)$ være torskebestanden i et havområde som funksjon av tida t^*. Havområdet kan i det lange løp fø en maksimal bestand K, og så lenge det ikke fiskes og $x^* \ll K$, vil x^* vokse med rate r, $dx^*/dt^* = rx^*$. Vi antar at oppfisket kvantum pr. tidsenhet er $\alpha x^* B$, der B er antall båter som deltar i fisket, og α er en konstant.

(a) Sett opp en modell for fiskebestanden slik at den med passende skalering får formen

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t) - x^2(t) - \mu x(t).$$

(b) Drøft likevektsløsningene til modellen for ulike (konstante) verdier av μ. Skissér mulige tidsutviklinger for bestanden.

(c) Bestem et uttrykk for antallet båter som gir en optimal forvaltning av fiskeressursen.

Løsning:

(a) Oppgitt ligning indikerer at vi skal anta en logistisk modell uten fangst, og dermed finner vi umiddelbart at

$$\frac{dx^*}{dt^*} = rx^*\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \alpha x^* B$$

Vi skalerer modellen ved å sette

$$\begin{aligned} x^* &= xK, \\ t^* &= \frac{1}{r}t \end{aligned}$$

Dermed finner vi

$$Kr\frac{dx}{dt} = rKx\,(1-x) - \alpha KxB,$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(1-x) - \mu x, \\ \mu &= \frac{\alpha B}{r}. \end{aligned}$$

(b) Likevektsløsningene blir

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 1 - \mu. \end{aligned}$$

Vanlig lineær stabilitetsanalyse, der vi benytter at

$$\frac{d\,(x\,(1-x) - \mu x)}{dx} = 1 - 2x - \mu,$$

gir at løsningen x_1 er stabil for $\mu > 1$ og ustabil for $\mu < 1$, mens x_2 er stabil når $\mu < 1$ og ustabil når $\mu > 1$(Det fysisk akseptable området er naturligvis $x_1,\, x_2 \geq 0$).

Hvis $\mu = 1$, blir ligningen

$$\dot{x} = -x^2,$$

og begge likevektsløsningene faller da sammen i $x = 0$. Denne ligningen kan løses generelt,

$$\frac{1}{x} = t + C,$$

dvs.

$$x = \frac{1}{t + C},$$

eller også $x = 0$, som opplagt er en løsning. Hvis vi starter i $x(0)$ litt til høyre for 0, vil $x(t) \to 0$ når $t \to \infty$. Hvis derimot $x(0) = 1/C < 0$, vil $x(t) \to -\infty$ når $t \to -C$. Likevektspunktet er dermed fysisk stabilt også for $\mu = 1$, siden vi jo har at $x \geq 0$.

Det fullstendige svaret vil da bli at likevektspunktene

$$x_s = \max\{1 - \mu, 0\}, \ \mu \geq 0$$

er stabile, mens

$$x_u = 0, \ 0 \leq \mu < 1,$$

er ustabile.

(c) Et konstant uttak pr. tidsenhet kan uttrykkes som

$$Q = (\alpha B)\, x_2^* = (\alpha B)\, K(1 - \mu) = (\mu r)\, K(1 - \mu) = Kr\mu(1 - \mu), \quad (3)$$

og dette har et maksimum for $\mu = 1/2$, dvs., $B = r/(2\alpha)$ og $x_2^* = K/2$.

4 Oppgave

I denne oppgaven skal vi studere trafikken langs en veg (envegskjørt mot $+\infty$, og uten av- og innpåkjørsler i første omgang), og vi antar at alle variable er skalert slik at biltettheten ρ er mellom 0 og 1, og bilhastigheten v er lik $1-\rho$.

(a) Vis hvordan en finner et uttrykk for sjokkhastigheten U til et sprang i biltettheten, og at vi i dette tilfellet får at $U = 1 - \rho_1 - \rho_2$, der ρ_1 og ρ_2 er tetthetene på hver side av sjokket.

Langs vegen kjører det biler for $t < 0$ med tetthet $\rho = 1/2$. Mellom $t = 0$ og $t = 1$ får bilene rødt lys for en fotgjengerovergang plassert i $x = 0$. For $t > 1$ er lyset igjen grønt.

(b) Bestem løsningen $\rho(x,t)$ for $t \geq 0$. (Vink: Lag først en skisse av situasjonen i et x-t-diagram. Vis at løsningen for ρ må bestemmes i 5 ulike områder, der verdien i 4 av dem er opplagt. For å bestemme områdene, må en finne grensene).

Et annet sted på vegen kommer det nå innpå en veg nummer 2 av samme type som den første vegen.

(c) Hvilken bevarelseslov må holde i krysset? Anta at fluksen på den første vegen inn mot krysset er konstant, $j_1 = 1/8$, og at biltettheten er mindre enn $1/2$. Beskriv (uten videre regning) utviklingen i biltettheten på vegene når tettheten ρ_2 på veg to øker fra 0 til 1. Bilene på første veg har forkjørsrett, men er fleksible og slipper biler inn dersom det er mulig. Se spesielt på hva som skjer når fluksen på veg to når opp til $1/8$.

Løsning:

Dette er den såkalte *standardmodellen*: $0 \leq \rho \leq 1,\ v = 1-\rho,\ j = \rho(1-\rho)$. Bevarelsesloven kan skrives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho dx + j(b) - j(a) = 0, \tag{4}$$

eller på differensialformen

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = \rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0.$$

(a) Vi utleder sjokkhastigheten ved å betrakte et sjokk med hastighet U inne i området (a,b). Tettheten til venstre for sjokket er ρ_1 og tettheten til høyre ρ_2. Ved å sette dette inn i lign. 4, får vi

$$(\rho_2 - \rho_1)U = \rho_2(1-\rho_2) - \rho_1(1-\rho_1),$$

med andre ord,

$$U = 1 - \rho_1 - \rho_2.$$

(b) For $\rho = 1/2$ er karakterstikkene vertikale, og vi vil ha en situasjon som skissert på figur 1.

For sjokket OA er $\rho_2 = 1$ og $\rho_1 = 1/2$, med andre ord er sjokkhastigheten $U_{OA} = -1/2$. På tilsvarende måte finner at $U_{OB} = 1/2$, $U_{GB} = 1$ og $U_{GA} = -1$. Punktet A ligger da i $x = -1$, $t = 2$, og B i $x = 1$, $t = 2$. Inne i ekspansjonsbølgen er løsningen gitt av

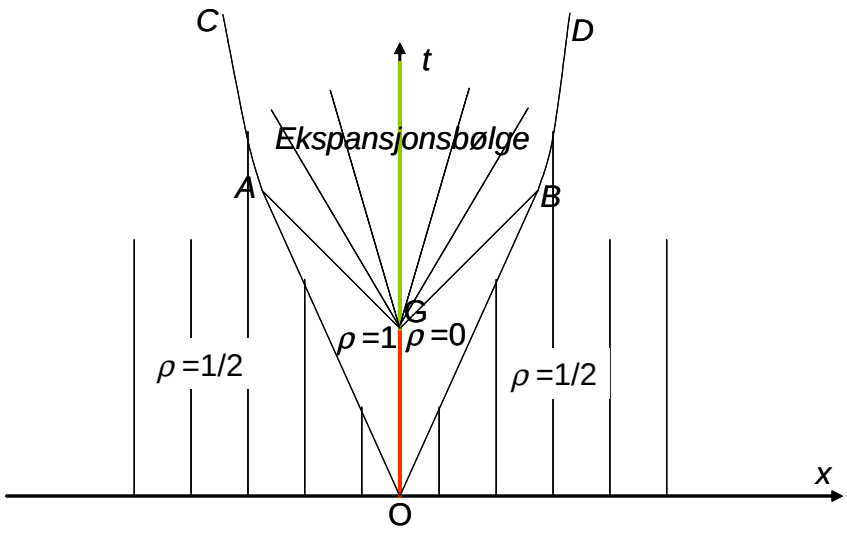
$$x = c(\rho)(t-1) = (1-2\rho)(t-1),$$

eller

$$\rho_e(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{t-1}\right).$$

Nå gjenstår bare å finne sjokkene AC og BD. I et punkt (x,t) på sjokket AC vil $\rho_1 = 1/2$, mens $\rho_2 = \rho_e(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{t-1}\right)$. Dermed blir

$$U(x,t) = 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{t-1}\right)\right) = \frac{x}{2(t-1)}.$$



Figur 1: Skisse av situasjonen rundt fotgjengerovergangen.

Ligningen for sjokket blir følgelig

$$\dot{x} = \frac{x}{2\,(t-1)},$$
$$x\,(2) = -1.$$

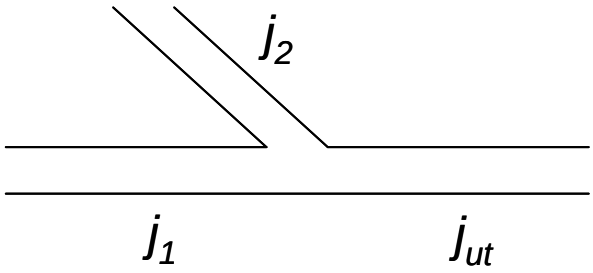
Ligningen er separabel og løsningen blir $x_{AC}\,(t) = -\sqrt{t-1},\ t \geq 2$. På tilsvarende måte finner vi $x_{BD} = \sqrt{t-1}$. Dermed er løsningen fullstendig bestemt.

(c) Situasjonen er skissert på figur 2. Siden krysset ikke er noen parkeringsplass, må vi ha

$$j_1 + j_2 = j_{ut}.$$

Det er oppgitt at $j_1 = 1/8$, men

$$j_1 = \frac{1}{8} = \rho\,(1-\rho)$$



Figur 2: Veg nummer 2 kommer inn på veg 1.

har to mulige løsninger,

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Her er imidlertid $\rho_1 < 1/2$, og da er tettheten konstant lik $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}}$.

Såfremt $j_2 < 1/8$, vil $j_{ut} < 1/4$, som er maksimal verdi.

Når j_2 går forbi verdien $1/8$, vil det hope seg opp biler foran krysset på veg to. Siden fluksen ut fra veg to maksimalt kan bli $1/8$, må tettheten av biler rett foran krysset da bli

$$\rho_{2f} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

I bak-kant av hopen får vi et sjokk som vokser med hastighet

$$U = 1 - \rho_2 - \rho_{2f}.$$

helt til $\rho_2 = \rho_{2f}$. Når ρ_2 øker videre fra ρ_{2f}, vil fluksen av biler på veg 2 være så liten ($<1/8$) at alle kommer innpå uten problemer!