

TMA 4195 Matematisk modellering

Eksamen 12. desember 2007

Løsningsforslag med kommentarer

(Revidert 14. desember, 2007)

1 Oppgave

Luftmotstanden, F , til en bil avhenger blant annet av lengden, L , tverrsnittsarealet, A , hastigheten i forhold til lufta, U , tettheten av lufta, ρ , og luftas kinematiske viskositet, ν .

(a) Bruk dimensjonsanalyse til å etablere formelen

$$F = \rho U^2 A \phi \left(\frac{UL}{\nu}, \frac{A}{L^2} \right). \quad (1)$$

For å bestemme funksjonen ϕ , har ingeniørene tenkt å lage skalamodeller 1:10 som de ønsker å teste ut ved å trekke dem gjennom vann i modelltanken på Tyholt ($5 \times 10m$ tverrsnitt, 270m lang).

(b)

Er dette en god idé? (For overslag: Luft: $\nu = 10^{-5} m^2/s$ og $\rho = 1 kg/m^3$. Vann: $\nu = 10^{-6} m^2/s$ og $\rho = 10^3 kg/m^3$).

Løsning:

(a) Formelen gir oss alle enhetene vi har bruk for, og vi kan sette opp dimensjonsmatrisen:

	F	U	L	A	ρ	ν
m	1	1	1	2	-3	2
s	-2	-1	0	0	0	-1
kg	1	0	0	0	1	0

(2)

Matrisen har rang 3, og med U , L og ρ som kjernevariable får vi

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{A}{L^2}, \\ \pi_2 &= \frac{\nu}{UL}, \\ \pi_3 &= \frac{F}{\rho U^2 L^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dette blir det samme oppgitt formel hvis vi skriver $\Psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ om til

$$\pi_3 = \pi_1 \phi \left(\frac{1}{\pi_2}, \pi_1 \right). \quad (4)$$

(Dimensjonsanalysen gir aldri en entydig form, og i utgangspunktet vil alle rimelige måter å skrive formelen på være like gode. I stedet for L kunne vi brukt A , eventuelt $\sqrt{A}$, som en av kjernevariablene).

(b) Modellen vil redusere L med en faktor 10 og arealet med en faktor 100 (Det er mulig det burde stått 10:1, hvis en tenker *original* $\rightarrow$ *modell*, men det ser ikke ut til at noen har misforstått det). For å kartlegge funksjonen bør π_1 og π_2 for modellen ha noenlunde samme verdier som for originalen. Dette er greit for π_1 , som blir uendret. For at $\pi_2^{-1} = UL/\nu$ (Reynolds tall) skal bli det samme, må $U_{\text{modell}} = U_{\text{original}}$, siden forholdet L/ν også blir uendret mellom originalen i luft og modellen i vann. Når det gjelder kraften på modellen, vil $(\rho_{\text{vann}} L_{\text{modell}}^2) = 10 \times (\rho_{\text{luft}} L_{\text{original}}^2)$. Ut fra dette, er det klart at testen byr på store tekniske problemer. Ved hundre km/t vil f.eks. modellen bruke knapt 10 sekunder over hele tankens lengde. Trekkvogna kan langt fra gå med slik hastighet, så en kan se helt bort fra å kunne teste modellen for hastigheter der luftmotstanden vil ha betydning. Til sist burde vel modellen ”rulle” langs bunnen. Som rimelig kan være, har jeg aldri hørt om at noen har prøvd på dette.

Under eksamen var det en del som har kommet fram til motsatt konklusjon, delvis på grunn av litt feil overslag. Dette har det ikke blitt trukket mye for.

For realistiske hastigheter er ϕ relativt lite avhengig av Reynolds tall, men avhenger av bilens geometri (”strømlinjeform”). Bilindustrien skriver ligningen ovenfor

$$F_D = \rho U^2 A \frac{C_d}{2}, \quad (5)$$

der C_d er den såkalte *drag*-koeffisienten. På moderne biler har den verdier rundt 0.3 (http://en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficients).

2 Oppgave

Finn likevektspunktene og bestem om de er stabile eller ustabile for følgende ligning:

$$\frac{du}{dt} = (u - u^2)(u - \mu), \quad u \geq 0, \mu \geq 0. \quad (6)$$

Løsning:

Dette er et standard problem der likevektspunktene finnes ved å løse

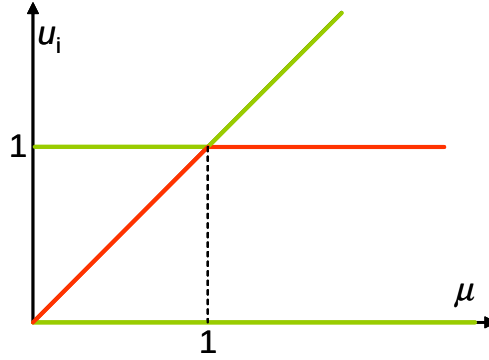
$$f(u_0, \mu) = 0. \quad (7)$$

Deretter sjekkes stabiliteten ved å studere en Taylorutvikling rundt u_0 , $u = u_0 + y + H.O.L.$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, \mu) y + H.O.L. \quad (8)$$

Stabiliteten kan normalt avgjøres ved å se på fortegnet til $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, \mu)$. I dette tilfellet er likevektspunktene gitt umiddelbart:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1, \\ u_2 &= \mu. \end{aligned} \quad (9)$$



Figur 1: Bifurkasjonsdiagram. Rødt er ustabile og grønt stabile likevektspunkter.

Dessuten er

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, \mu) &= -\mu, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_1, \mu) &= \mu - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_2, \mu) &= (\mu - \mu^2).\end{aligned}\tag{10}$$

Dermed kan vi lage bifurkasjonsdiagrammet på Fig. 1 (for $u \geq 0$, $\mu \geq 0$).

For å være komplett, bør en også sjekke $u = 0$ for $\mu = 0$, og $u = 1$ for $\mu = 1$. For det første punktet blir ligningen for perturbasjonen $\dot{y} = y^2 + y^3$, og det blir opplagt *ustabilt* hvis $y(0) > 0$.

I $u = 1$, $\mu = 1$ blir ligningen $\dot{y} = -y^2 - y^3$, som blir *stabilt* for $y(0) > 0$ og *ustabilt* for $y(0) < 0$ og liten, altså slik en kan forvente ut fra diagrammet.

3 Oppgave

Celletettheten, n^* , i en del av kroppen kan modelleres som

$$\frac{dn^*}{dt^*} = \alpha n^* - \omega n^*,\tag{11}$$

der α er fødselsrate og ω dødsrate. For at tettheten ikke skal løpe løpsk, produserer cellene en såkalt inhibitor som hemmer ukontrollert vekst. Inhibitoren har tetthet c^* og virker ved at fødselsraten reguleres:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + c^*/A}.\tag{12}$$

Produksjonen av inhibitor er proporsjonal med n^* , mens den brytes ned med rate δ :

$$\frac{dc^*}{dt^*} = \beta n^* - \delta c^*.\tag{13}$$

Dette systemet har en tidsskala ω^{-1} knyttet til nedbrytingen av celler, og en tidsskala δ^{-1} knyttet til kjemisk nedbryting av inhibitor. Det er oppgitt at $\omega^{-1} \gg \delta^{-1}$.

(a) Skaler ligningssystemet med utgangspunkt i ω^{-1} for tiden og A som skala for c^* . Vis at systemet med en passende skala for n^* får formen

$$\begin{aligned}\dot{n} &= \left(\frac{\kappa}{1+c} - 1 \right) n, \\ \varepsilon \dot{c} &= n - c.\end{aligned}\tag{14}$$

Hva betyr ε og κ ? Hva kan vi si om størrelsen av ε , og hva kalles et slikt ligningssystem? Bestem typen til det trivielle likevektspunktet $(0,0)$ (Her og i resten av oppgaven antar vi at κ er noe større enn 1).

(b) Finn banen og ligningen for bevegelsen til den ytre løsningen av (14) til ledende orden ($O(1)$). Vis, uten nødvendigvis å løse ligningen, at all bevegelse på denne banen går mot et likevektspunkt for det fullstendige problemet.

(c) Bestem ledende ordens indre løsning til (14) ved å føre inn ny tidsskala, og deretter en uniform, tilnærmet løsning (det er ikke mulig å løse ligningen i (b) eksplisitt)

Løsning:

(a) Her er det oppgitt at vi skal bruke tidsskalaen $T = 1/\omega$, og C_0 som skala for c^* . Ved å sammenligne ligningene 13 og 14, ser vi at vi må velge skalaen for n^* som

$$N_0 = \frac{\delta}{\beta} C_0,\tag{15}$$

og hvis dette settes inn, følger lign. 14 umiddelbart. Parametrene som står igjen blir

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\alpha_0}{\omega} = \frac{1/\omega}{1/\alpha_0}, \\ \varepsilon &= \frac{\omega}{\delta} = \frac{1/\delta}{1/\omega}.\end{aligned}\tag{16}$$

Begge er forhold mellom tidsskalaer, der det er opplyst om at κ er noe større enn 1, mens $0 < \varepsilon \ll 1$. Dette er altså et singulært perturbert system. Likevektspunktene leses rett ut fra ligningen:

$$\begin{aligned}(n_1, c_1) &= (0, 0), \\ (n_2, c_2) &= (\kappa - 1, \kappa - 1)\end{aligned}\tag{17}$$

Linearisering omkring $(0,0)$ gir

$$\begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}.\tag{18}$$

Med egenverdier $\lambda_1 = \kappa - 1 > 0$ og $\lambda_2 = -1/\varepsilon < 0$, blir punktet et sadelpunkt. Det var ikke spurt etter å analysere det andre likevektspunktet.

(b) Lign. 14 er et singulært perturbert system siden $\varepsilon \ll 1$. For ytre løsning til ledende orden, $n_0(t)$ og $c_0(t)$, finner vi først at $n_0(t) = c_0(t)$, og dette gir oss ligningen

$$\frac{dn_0}{dt} = \left(\frac{\kappa}{1+n_0} - 1 \right) n_0. \quad (19)$$

Punktet $(\kappa-1, \kappa-1)$ er fremdeles et likevektspunkt, og fra en fortegnsanalyse ser vi at $(\kappa-1)$ er et stabilt likevektspunkt for 19 uansett hvor vi velger å starte fra for $0 < n_0(0) < \infty$ (Lokalt kan en finne at det er stabilt også ved å gå fram som i Oppgave 2).

Det er mulig å løse ligning 19 et stykke på vei siden vi kan skrive den på formen

$$\frac{1+n_0}{(\kappa-1-n_0)n_0} dn_0 = dt, \quad (20)$$

eller, hvis $\kappa > 1$,

$$\left(\frac{1}{n_0} - \frac{\kappa}{n_0 - \kappa + 1} \right) dn_0 = \frac{dt}{\kappa - 1}. \quad (21)$$

Dermed blir implisitt løsning gitt av

$$\frac{n_0}{|n_0 - (\kappa - 1)|^\kappa} = e^{(t-t_0)/(\kappa-1)}. \quad (22)$$

Siden $e^t \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$, vil vi derfor alltid ha $n_0(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \kappa - 1$ (hvis $n_0(0) \neq 0$).

Det var en del som hadde reagert på ordet *bane*, og slik det sto, kunne det være litt uvant. Vanligvis blir det brukt om en funksjonell sammenheng mellom de avhengige variablene (n_0 og c_0 i dette tilfelle). Her er banen for ytre løsning til ledende orden $\{(n_0, c_0); n_0 = c_0\}$ (Banene beregnes vanligvis ved å dividere ligningene med hverandre, men her er det unødvendig).

(c) Vi prøver med tidsskalaen ε , dvs. $\tau = t/\varepsilon$ for starten av bevegelsen. Dette gir oss følgende ligninger, der vi bruker $N(\tau)$ og $C(\tau)$ for å skille den indre løsningen fra de andre:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\tau} &= \varepsilon \left(\frac{\kappa}{1+C} - 1 \right) N, \\ \frac{dC}{d\tau} &= N - C. \end{aligned} \quad (23)$$

Til ledende orden får vi altså

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dC_0}{d\tau} &= N_0 - C_0, \end{aligned}$$

Vi starter i punktet $(n(0), c(0))$, og dermed blir indre løsning

$$\begin{aligned} N_0(\tau) &= n(0), \\ C_0(\tau) &= [c(0) - n(0)] e^{-\tau} + n(0). \end{aligned} \quad (24)$$

For den ytre løsningen har vi ikke startpunktet, men vet fra (b) at $n_0(t) = c_0(t)$, slik at vi kan anta

$$\begin{aligned} n_0(0) &= A, \\ c_0(0) &= A. \end{aligned} \quad (25)$$

”Matching-kravet” er i enkleste form

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} C_0(\tau) &= \lim_{t \rightarrow 0} c_0(t), \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} N_0(\tau) &= \lim_{t \rightarrow 0} n_0(t), \end{aligned} \quad (26)$$

og heldigvis (!) vil $A = n(0)$ tilfredsstille begge disse kravene. Uniform løsning er generelt gitt som

$$u_u(t) = u_0(t) + U_0(\tau) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} U_0(\tau). \quad (27)$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} n_u(t) &= n_0(t), \\ c_u(t) &= n_0(t) + [c(0) - n(0)] e^{-t/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (28)$$

Helt generelt vil

$$\dot{c} = \frac{1}{\varepsilon} (n - c) \quad (29)$$

fortelle oss at $\dot{c}$ blir stor og positiv hvis $n - c \gg \mathcal{O}(\varepsilon)$, og stor og negativ hvis $n - c \ll \mathcal{O}(-\varepsilon)$. Videre ser vi at $\dot{n} < 0$ hvis $c > \kappa - 1$, og $\dot{n} > 0$ hvis $c < \kappa - 1$. Sammen med det vi fant i (b), gir dette et godt kvalitativt inntrykk av banene, som har blitt regnet ut numerisk på fig. 2. Det er opplagt at så lenge som vi ikke starter med $n(0) = 0$, vil vi, for $t \rightarrow \infty$, havne i likevektspunktet $(\kappa - 1, \kappa - 1)$.

4 Oppgave

(a) Definer skalert fluks og kinematisk hastighet i standardmodellen for veitrafikk, som blant annet leder til diff.ligningen

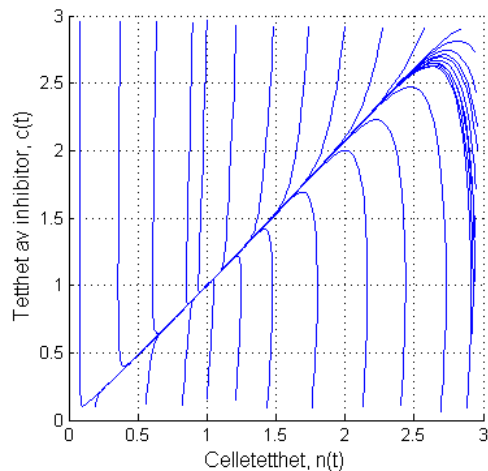
$$\rho_t + (1 - 2\rho) \rho_x = 0. \quad (30)$$

Skissér karakteristikkene og løsningen $\rho(x, t)$ til lign. 30 for $t > 0$ hvis

$$\begin{aligned} (i) \quad \rho(x, 0) &= \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x \geq 0. \end{cases} \\ (ii) \quad \rho(x, 0) &= \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Vi skal fra nå av betrakte en situasjon der det kontinuerlig kommer biler til og kjører biler ut fra veien (selve veien er enveiskjørt). Dette vil vi modellere som et kildeledd, slik at ligningen blir

$$\rho_t + (1 - 2\rho) \rho_x = \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \rho \right), \quad \varepsilon > 0. \quad (32)$$



Figur 2: Numerisk løsning av det skalerte ligningssystemet i Oppgave 3 med $\kappa = 2$ og $\varepsilon = 0.1$.

(Hvis $\rho < \frac{1}{2}$, er det et netto tilslag av biler, mens det for $\rho > \frac{1}{2}$ forsvinner biler ut fra veien).

(b) Vis at en karakteristikk som starter i $(0, x_0, c_0)$ kan, for $t \geq 0$, skrives som

$$\left\{ t, x_0 + \frac{(1 - 2\rho_0)}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}), \frac{1}{2} + \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varepsilon t} \right\}. \quad (33)$$

(c) Finn løsningen av lign. (32) for $t > 0$ med (i) i (31) som startbetingelse.

(d) Vis at løsningen av lign. (32) for $t > 0$ med (ii) i (31) som startbetingelse vil utvikle sjokk. Bruk bevaringsloven til å argumentere for at sjokket kan stå i ro. Bestem løsningen med utgangspunkt i denne forutsetningen.

(Vink: For ligningen

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} - R(x, y, z) = 0 \quad (34)$$

er ligningene for karakterstikkene

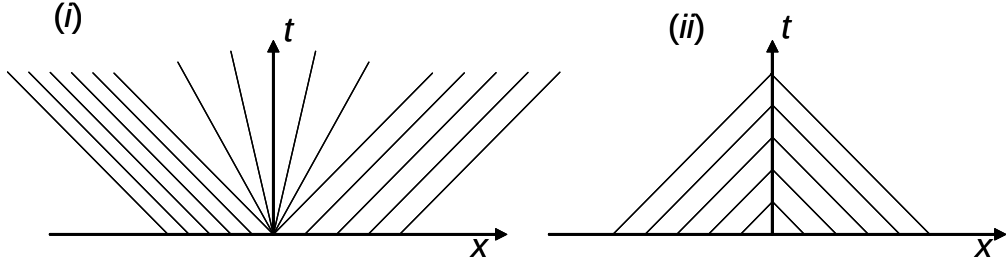
$$\frac{dx}{ds} = P(x, y, z), \frac{dy}{ds} = Q(x, y, z), \frac{dz}{ds} = R(x, y, z). \quad (35)$$

Løsning:

(a) I standardmodellen er tettheten ρ antall biler pr. lengdeenhet og skalert til $0 \leq \rho \leq 1$.

Bilhastigheten $v = 1 - \rho$, mens fluksen er $j = \rho(1 - \rho)$ og kinematisk hastighet er $c(\rho) = \frac{dj}{d\rho} = 1 - 2\rho$. Vi skal finne løsningen i to ulike situasjoner, og for oversiktens skyld er det greit å lage to skisser som på fig. 3. Situasjon (i) leder til en ekspansjonsbølge, mens situasjon (ii) gir et sjokk. Merk at vi har brukt at for standardmodellen er sjokkhastigheten gitt ved $U = 1 - \rho_1 - \rho_2$, og derfor blir $U = 0$ for problem (ii). Følgelig blir løsningen ikke noe annet enn

$$\rho(x, t) = \rho(x, 0). \quad (36)$$



Figur 3: Situasjon (i) leder til en ekspansjonsbølge, mens (ii) gir et sjokk.

For ekspansjonsbølgen blir ρ stykkevis lineær, dvs.

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq -t, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t}\right), & -t \leq x \leq t, \\ 0, & x \geq t. \end{cases} \quad (37)$$

(b) Ligningene for karakteristikkene med s som parameter kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1, \\ \frac{dx}{ds} &= 1 - 2\rho, \\ \frac{d\rho}{ds} &= -\varepsilon \left(\rho - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Siden første ligning gir $t = A + s$, kan vi velge $s = t$. Dermed blir 3. ligning

$$\frac{d\rho}{\rho - \frac{1}{2}} = -\varepsilon dt, \quad (39)$$

med generell løsning

$$\ln \left| \rho - \frac{1}{2} \right| = C_1 - \varepsilon t, \quad (40)$$

eller

$$\rho = \frac{1}{2} + C_2 e^{-\varepsilon t}. \quad (41)$$

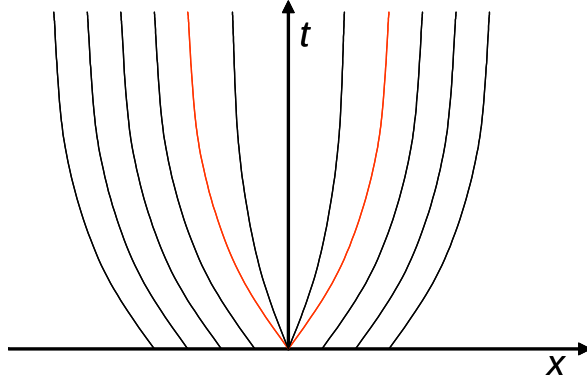
(Det er enda enklere å observere at ligningen kan skrives $\dot{\rho} + \varepsilon \rho = \frac{\varepsilon}{2}$, og følgelig har løsning $\rho(t) = C e^{-\varepsilon t} + \frac{1}{2}$).

Her skal $\rho(0) = \rho_0$, og dermed blir

$$\rho = \frac{1}{2} + \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varepsilon t}. \quad (42)$$

Til slutt beregner vi x fra

$$\frac{dx}{ds} = 1 - 2\rho = -(2\rho_0 - 1) e^{-\varepsilon t}, \quad (43)$$



Figur 4: Skisse av karakteristikkene for problem (i). Utenfor grensekarakteristikkene (i rødt) er løsningen uberørt av ekspansjonsbølgen.

dvs.

$$x = C_3 + \frac{2\rho_0 - 1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}, \quad (44)$$

og med $x(0) = x_0$,

$$x = x_0 + \frac{2\rho_0 - 1}{\varepsilon} (e^{-\varepsilon t} - 1) = x_0 + \frac{1 - 2\rho_0}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}), \quad (45)$$

som var oppgitt i oppgaveteksten.

Karakteristikkene for ligning 32 konvergerer som forventet mot karakteristikkene for ligning 30 når $\varepsilon \rightarrow 0$.

(c) Her benytter vi oss av ligningen for karakteristikkene fra (b):

$$\left\{ t, x_0 + \frac{1 - 2\rho_0}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}), \frac{1}{2} + \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varepsilon t} \right\}. \quad (46)$$

For projeksjonen av karakteristikkene ned i (x, t) -planet, ser vi at hvis de starter i x_0 med verdi ρ_0 for $t = 0$, vil retningen ut fra $(x_0, 0)$ være $dx/dt = 1 - 2\rho_0$. Dessuten vil $\lim_{t \rightarrow \infty} dx/dt = 0$, og $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 + (1 - 2\rho_0)/\varepsilon$, som vist på skissen. Det er ikke vanskelig å se at vi får en ekspansjonsbølge omlag slik den er skissert. Merk også at $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 1/2$. Vi kan ellers legge merke til at løsningen utenfor grensekarakteristikkene

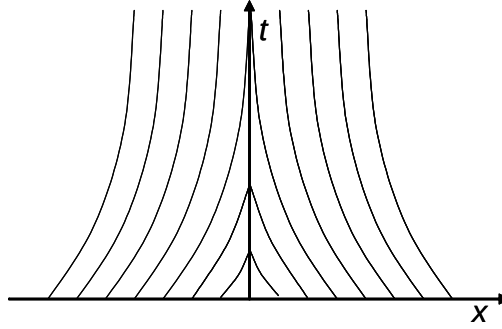
$$x(t) = \pm \frac{1 - e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} \quad (47)$$

utvikler seg helt uberørt av ekspansjonsbølgen, og her vil derfor

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2} + \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varepsilon t}, \quad \rho_0 = 0, 1. \quad (48)$$

Inne i ekspansjonsfanen er løsningen i punktet (x, t) gitt implisitt ved at vi først bestemmer ρ_0 fra

$$0 + \frac{1 - 2\rho_0}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}) = x, \quad (49)$$



Figur 5: For problem (ii) vil i alle fall karakteristikkene som starter for nær origo kollidere. Figuren viser et stasjonært sjokk i origo som det er argumentert for i teksten.

dvs.

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon x}{1 - e^{-\varepsilon t}} \right). \quad (50)$$

Deretter finner vi

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2} + \left(\rho_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-\varepsilon t} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon x e^{-\varepsilon t}}{1 - e^{-\varepsilon t}} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

(d) Hvis vi snur på situasjonen i (c), vil karakteristikkene som starter på hver sin side av (og nær nok) origo kollidere, som vist på fig. 5.

Et stasjonært sjokk i origo gir en symmetrisk situasjon der ρ -verdiene på hver sin side av $x = 0$ er symmetriske om $\rho = 1/2$. Dette gir kontinuerlig fluks over sjokket siden $j = \rho(1 - \rho)$. Kildeleddet er uten betydning hvis bredden på kontrollvolumet går mot 0, og dessuten vil innholdet i et kontrollvolum som er symmetrisk om $x = 0$ ikke ha noen netto endring, siden kildefunksjonen er antisymmetrisk om $\rho = 1/2$. Med antagelsen om et stasjonært sjokk, får vi løsningen umiddelbart:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-\varepsilon t}), & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 + e^{-\varepsilon t}), & x > 0. \end{cases} \quad (52)$$