

Figure 1: Idealisert bilde av ei elv.

Flodbølger i elver

HEK, Oktober 2002.

Vi skal nedenfor se litt på den aller enkleste teorien for flodbølger i elver, og dette er en litt annen situasjon enn det sirkulære vannspranget som er omtalt i heftet. Vi tar for oss vann som strømmer nedover et skråplan med heldningsvinkel α. Bredden av strømmen på tvers av skråplanet er B, men egentlig tenker vi oss en situasjon der forholdene på tvers er konstante, og at elva er uendelig brei. Vi tenker oss også at hastigheten på vannet er rettet ned langs skråplanet og har verdien v, som generelt være en funksjon av posisjonen x og tiden t, men antas uavhengig av z. Videre har vannet dybden $z = h(x,t)$. For å modellere strømningen skal vi benytte masse- og impuls-bevarelse.

La oss først se hva massebevarelsen gir. I utgangspunktet har bevarelsesloven den generelle formen

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho dV + \int_{\partial R} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0. \tag{1}$$

Her kan en naturligvis anta at tettheten ρ er konstant og bruke $dV = Bh(x,t)dx$, mens mengden q som strømmer forbi et punkt x pr. tidsenhet har formen

$$q(x,t) = \rho v(x,t)\cdot(Bh(x,t)). \tag{2}$$

Fluksvektoren (mengde pr. flateenhet og tid) blir følgelig $\mathbf{j} = \rho v\hat{\imath}$. Dette kan vi så føre inn i lign. 1 for et utsnitt av elva mellom $x = a$ og $x = b$ og benytte at $\mathbf{n} = -\hat{\imath}$ i $x = a$, og $\hat{\imath}$ i $x = b$:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho Bh(x,t)dx + \rho v(b,t)\cdot(Bh(b,t)) - \rho v(a,t)\cdot(Bh(a,t)) = 0. \tag{3}$$

Legg merke til fluksen er null på grenseflatene mot bunnen og overflaten, og i y-retning antar vi jo at det ikke er noen strøm. Ved å la $a \to b$, dividere med $b-a$ på vanlig måte, og flytte derivasjon innenfor integraltegnet, får vi ligningen på differensialform:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0. \tag{4}$$

Siden er det to ukjente funksjoner, v og h som inngår, kan vi ikke løse ligningen slik den står.

Impulsbevarelsen vil her kun gi oss noe for impulsen i x-retningen, $p_x = \rho v$, og bevarelsesloven får følgende form:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (\rho v)\,Bhdx + [(\rho v)\,v\cdot(Bh)]_a^b = \sum F_x. \tag{5}$$

Det gjenstår å beskrive kreftene. Tyngdekraften virker på vannvolumet, og langs x-aksen utgjør denne kraftkomponenten

$$F_g = \int_a^b \rho g \sin\alpha B h dx, \tag{6}$$

Deretter har vi trykk-kreftene. Vi ser bort fra overflaten, og på bunnen er trykkomponenten langs x-aksen null. Derimot vil vi ha bidrag på endeflatene. Her regner vi hydrostatisk trykk og $\cos\alpha \approx 1$, slik at

$$dP = \rho g z dz. \tag{7}$$

Total trykkraft over flata ved $x = a$ blir følgelig

$$P(a,t) = \int_0^h \rho g z B dz = \rho g B \frac{h^2(a,t)}{2}, \tag{8}$$

og tilsvarende ved $x = b$,

$$P(b,t) = -\rho g B \frac{h^2(b,t)}{2}. \tag{9}$$

Den siste kraften som kommer inn er friksjonskraften mot bunnen. Det viser seg (delvis med bakgrunn i dimensjonsanalyse) at en kan anta at friksjonskraft pr. flateenhet (skjærspenning) kan skrives

$$\tau = -\rho C_f \mathbf{v} |\mathbf{v}|. \tag{10}$$

Konstanten C_f kalles for Chezy-faktoren (se lign. 297 i det blå heftet!). Den totale friksjonskraften blir følgelig

$$F_f = -\int_a^b \rho C_f v^2 (B dx). \tag{11}$$

Setter vi alt dette sammen og forkorter med ρB, får vi

$$\frac{d}{dt}\int_a^b vh dx + \left[(v)\, vh + \frac{g}{2}h^2\right]_a^b = \int_a^b \left(g \sin\alpha h - C_f v^2\right) dx. \tag{12}$$

Som en ser, kan det være litt møysommelig å få orden på dette, men prinsippet er ikke vanskelig. Differensialformuleringen følger slik som ovenfor:

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 h + \frac{g}{2}h^2\right) = g \sin\alpha h - C_f v^2 \tag{13}$$

Ligningene 1 og 13 utgjør det som kalles et hyperbolsk system. Det finnes en teori for systemer med to ligninger som vi ikke skal gå inn på her, men ligningene kan generelt ikke løses analytisk. Det er imidlertid lett å se at de har løsningen

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h_0, \\ v(x,t) &= v_0, \end{aligned} \tag{14}$$

der

$$g \sin\alpha h_0 - C_f v_0^2 = 0. \tag{15}$$

Lineær stabilitetsanalyse kan fortelle om hvorvidt løsningen er stabil, og denne analysen, som er analog til den som er gjort for ustabiliteter i en bilkø, er diskutert i boka til Whitham [1], s. 85-86.

Hvis vi neglisjerer venstre side i lign. 13 , vil tyngdekraften balansere friksjonen, mens trykk-krefter og akselerasjonskrefter neglisjeres (Dette kalles kinetisk teori). Da vil

$$v = \sqrt{\frac{g \sin\alpha}{C_f}} h^{1/2}, \tag{16}$$



Figure 2: Tidevannsbåren på Qiantang River nær Hangzhou, China, også kjent som Hangchow eller Hangzou Bore. Bølgen kan bli opp til 9 meter høy og kommer in 2 ganger daglig. Den er mest utpreget rundt vår- og høstjevndøgn.

og følgelig får ligning 1 formen

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} \frac{\partial}{\partial x} h^{3/2} = 0. \tag{17}$$

Kinematisk hastighet blir

$$c(h) = \frac{d}{dh} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{1/2} = \frac{3}{2} v(h).$$

Vi overlater til leseren å vise at hvis vannstanden oppover i elva øker, med andre ord, hvis $\partial h/\partial x < 0$, kan det utvikles et sjokk som i så fall beveger seg nedover i elva som en vegg. Fenomenet kan oppstå i regulerte elver, og langs noen av disse vil en finne advarsler fra e-verkene om dette. Legg merke til at hastigheten på sjokket vil være omlag 50% større enn hastigheten på vannstrømmen.

På de følgende bildene, som jeg har hentet fra WEB-siden til Dr Hubert Chanson, Univ. of Queensland, Australia (`http://www.uq.edu.au/~e2hchans/`), ser vi eksempler på noen tilsvarende situasjoner. Disse bølgene kalles tidevannsbårer (tidal bores), og de oppstår som sjokk-løsninger av ling. 1 og 13 i ei flat elv når tidevannsbølgen kommer inn fra munningen mot strømmen.

Fig. 2 er det mest berømte eksemplet på en tidevannsbåre. Figur 3 viser et noe annet forløp. Bildet er fra elva Dorgonge i Frankrike. Seinen hadde før i tiden en tilsvarende bølge som kunne nå helt til Paris i heldige tilfeller, men dette skal ikke lenger være så framtredende.

References

[1] Whitham, G.B.: Linear and Nonlinear Waves, Wiley 1974.



Figure 3: Surfere på tidevannbølge som kommer inn Dordogne-elven.