MA 104, Høst 2000

Per Tomter

Matrisenotasjon

V er et vektorrom av dimensjon n. $B = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ er en (ordnet) basis for V.

Enhver vektor $\bar{v} \in V$ kan skrives som $\bar{v} = v^1\bar{b}_1 + \cdots + v^n\bar{b}_n$, med éntydige koordinater $v^1, \ldots, v^n$. Koordinatsøylen til $\bar{v}$ er da: $\bar{v}^B = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$. (Merk at indeksene står oppe.)

Hvis T er en lineær avbildning fra V til et endelig-dimensjonalt vektorrom W og $C = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)$ er en basis for W, defineres T's matrise m.h.p. B og C som: $T_B^C = (T(\bar{b}_1)^C, \ldots, T(\bar{b}_n)^C)$. $T_B^C = \begin{pmatrix} t_1^2 & t_2^1 & \ldots & t_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^m & t_2^m & \ldots & t_n^m \end{pmatrix}$, altså sier øvre indeks hvilken linje jeg er i og nedre indeks hvilken søyle jeg er i. Da har vi $(T\bar{v})^C = T_B^C\,\bar{v}^B$.

Avbildningen $\bar{v} \to \bar{v}^B$ er en isomorfi fra V inn på $\mathbb{R}^n$, $\bar{w} \to \bar{w}^C$ er en isomorfi fra W inn på $\mathbb{R}^m$. Avbildningen $T \to T_B^C$ gir én-éntydig korrespondanse mellom lineæravbildninger og $(m \times n)$-matriser (faktisk også en isomorfi).

Alle spørsmål vedrørende den lineære avbildning T kan nå behandles ved å se på T_B^C.

En bilineær form på V er en avbildning $G : V \times V \to \mathbb{R}$ slik at:

1) $\bar{v} \to G(\bar{v}, \bar{w})$ er en lineær avbildning fra V inn i $\mathbb{R}$ for ethvert valg av $\bar{w} \in V$

2) $\bar{v} \to G(\bar{w}, \bar{v})$ er også lineær (fra V inn i $\mathbb{R}$). Matrisen til G m.h.p. basisen B er da gitt ved:

$$G_{BB} = \begin{pmatrix} g_{11} \ldots g_{1n} \\ g_{n1} \ldots g_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{der} \;\; g_{ij} = G(\bar{b}_i, \bar{b}_j)\ .$$

Da gjelder

$$G(\bar{v}, \bar{w}) = G(v^1\bar{b}_1 + \cdots + v^n\bar{b}_n, w^1\bar{b}_1 + \cdots + w^n\bar{b}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}v^iw^j$$

$$= (v^1, \ldots, v^n) \begin{pmatrix} g_{11} \ldots g_{1n} \\ \vdots \\ g_{n1} \ldots g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = (\bar{v}^B)^t G_{BB}\,\bar{w}^B\ .$$

Hvis G er et indre produkt på V kalles G_{BB} for indreproduktmatrisen m.h.p. B. Den tilfredsstiller betingelsene:

3) G_{BB} er symmetrisk

4) $(\bar{v}^B)^t G_{BB}\,\bar{v}^B \geq 0$ for enhver $\bar{v} \in V$, likhetstegnet gjelder bare for $\bar{v} = \bar{0}$.