# DYNAMISKE SYSTEMER OG MULTIPPEL INTEGRASJON

ARNE B. SLETSJØE

## 1. Differenslikninger

1.1. **Introduksjon.** Den italienske matematikeren Leonardo Pisano (ca. 1170-1250), bedre kjent som Fibonacci, er blitt viden kjent for sin kaninmodell. Vi skal beskrive utviklingen av en kaninpopulasjon som vokser etter følgende enkle prinsipp: *Hvert par av kaniner føder et nytt par kaniner hver måned og de begynner med det når de er to måneder gamle.* La oss anta at vi starter med ett par kaniner. Måneden etter har vi fortsatt bare ett par, men så begynner det å skje ting. Etter to måneder har det første paret fått barn og vi har to par kaniner, måneden etter får de et nytt par kaniner, mens de eldste ungene enda ikke har begynt å få unger slik at vi da har tre par kaniner. Etter tre måneder får også de førstefødte ungene unger og tilveksten blir to par. Til sammen har vi da fem par kaniner.

Vi kan lage en generell beskrivelse av det som skjer. Vi lar $x_n$ være antall kaniner etter $n$ måneder. Da har vi likningen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

som vi kan forklare slik: Antall kaniner etter $n+2$ måneder består av samtlige kaniner vi hadde forrige måned ($x_{n+1}$), i tillegg til at alle kaniner som levde for to måneder siden har fått unger og derfor tilført et tilsvarende antall ($x_n$) nye kaninpar.

Starter vi med $x_1 = x_2 = 1$ får vi følgen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Det er ikke helt enkelt å se for seg hva slags formel som beskriver det $n$-te leddet i denne følgen, men som vi skal se senere, ja endatil utlede, så er denne såkalte Fibonacci-følgen beskrevet av formelen

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

En likning av denne typen,

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

kalles en *annenordens homogen differenslikning* og en følge $\{x_n | n = 1, 2, 3, \ldots\}$ som tilfredsstiller rekursjonen kalles en løsning av likningen. Akkurat som for differensiallikninger finnes det i mange tilfelle uendelig mange løsninger, men dersom vi for en annenordens likning spesifiserer de to første leddene, så vil løsningen være entydig. Navnet annenordens henspeiler på at vi generelt trenger to forutgående ledd for å beskrive det neste.

En enklere type likninger er der det neste leddet kun er gitt ved det forrige (og eventuelt en funksjon i $n$). Vi skal se nærmere på dem i neste avsnitt.

1.2. **Førsteordens homogene lineære differenslikninger.** Den enklest mulige differenslikningen er

$$x_{n+1} - rx_n = 0$$

for et reellt tall $r \neq 0$. Denne kalles førsteordens siden $x_n$ kun er avhengig av ett tidligere ledd, den er homogen siden høyresiden av likningen er 0, og den er lineær siden vi kun har $x_n$ involvert i første potens.

Vi kan skrive ut de første leddene i følgen

$$x_1 = rx_0, \qquad x_2 = rx_1 = r^2x_0, \qquad x_3 = rx_2 = r^3x_0$$

Et enkelt induksjonsargument gir oss følgende generelle setning:

**Teorem 1.1.** *La $r \neq 0$ være et reellt tall. Følgen $\{x_n\}$ er en løsning av differenslikningen*

$$x_{n+1} - rx_n = 0$$

*hvis og bare hvis vi har $x_n = C \cdot r^n$ for alle $n \geq 0$ og en vilkårlig konstant $C$.*

**Eksempel 1.** En første ordens differenslikning er gitt ved

$$x_{n+1} = 2x_n$$

med initialbetingelse $x_0 = 1$. Teoremet over gir at den generelle løsningen av likningen er gitt ved

$$x_n = C \cdot 2^n$$

Vi setter inn for $n = 0$ og får $x_0 = C \cdot 2^0 = C = 1$ og den spesielle løsningen blir

$$x_n = 2^n$$

**Eksempel 2.** I en saueflokk fødes det hver vår en mengde lam. I løpet av sommeren vil en del av lammene dø som følge av at de faller ned skrenter, blir spist av ulv eller av andre grunner. Når vi teller opp bestanden om høsten observerer vi at antall individer har økt med 20 prosent. Til og begynne med er det 100 dyr i flokken. Vi er interessert i å vite hvor mange år det tar før vi har doblet antallet sauer i flokken, dvs. 200 dyr.

Vi stiller opp en modell for utviklingen av flokken, der $x_n$ er antall dyr etter $n$ sesonger.

Modellen er gitt ved en differenslikning

$$x_{n+1} = 1,2 \cdot x_n$$

med $x_0 = 100$. Teoremet over gir oss en generell løsning

$$x_n = C \cdot 1,2^n$$

der konstanten $C$ er verdien av $x_0$. Altså får vi

$$x_n = 100 \cdot 1,2^n$$

Ulikheten $x_n = 100 \cdot 1,2^n > 200$ gir $1,2^n > 2$ eller $n \cdot \ln 1,2 > \ln 2$ som igjen betyr at $n > 3,80$. Vi må med andre ord vente fire år før vi har over 200 dyr.

### Oppgaver til seksjon 1.2

1. Finn de generelle løsningene til differenslikningene.
   a) $x_{n+1} + 2x_n = 0$
   b) $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0$
   c) $x_{n+1} + x_n = 0$
2. En ball slippes fra 1 meters høyde og spretter i bakken. På første sprettet kommer den opp til 80 cm og så lar vi den sprette uforstyrret videre. For hvert sprett reduseres høyden med 20 prosent. Still opp en differenslikning som beskriver modellen og finn et uttrykk for hvor høyt ballen spretter på det n-te sprettet.
3. En mann setter 10 000 kroner i banken til 5 prosent rente pr. år. Rentene beregnes én gang i året. Still opp et uttrykk som viser hvor mange penger mannen har i banken etter $n$ år.

1.3. **Førsteordens inhomogene lineære differenslikninger.** Vi kan generalisere modellen i forrige seksjon ved å droppe homogenitetskravet. En generell førsteordens inhomogen differenslikning er gitt ved

$$x_{n+1} = rx_n + f(n)$$

og løsningen er beskrevet i følgende resultat:

**Teorem 1.2.** *La $r \neq 0$ være et reellt tall og $f(n)$ en funksjon definert på de ikke-negative heltallene $\mathbf{Z}_+$. Følgen $\{x_n\}$ er en løsning av differenslikningen*

$$x_{n+1} - rx_n = f(n)$$

*hvis og bare hvis vi har*

$$x_n = C \cdot r^n + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) r^{n-1-i}$$

*for alle $n \geq 0$ og en konstant $C$.*

*Bevis.* Anta at $x_n$ er gitt ved formelen i teoremet. Innsetting i likningen viser at dette er en løsning. Den motsatte implikasjonen skal vi vise ved induksjon på $n$.

For $n = 1$ får vi fra differenslikningen

$$x_1 = x_0 \cdot r + f(0)$$

som vi ser passer med formelen.

Anta så at

$$x_n = C \cdot r^n + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) r^{n-1-i}$$

Da følger det fra definisjonen av følgen at

$$\begin{aligned} x_{n+1} = rx_n + f(n) &= r(C \cdot r^n + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) r^{n-1-i}) + f(n) \\ &= C \cdot r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) r^{n-i} + f(n) \\ &= C \cdot r^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} f(i) r^{n-i} \end{aligned}$$

som gir formelen, innsatt $n + 1$. □

Det er klart at for en vilkårlig funksjon $f(n)$ er det umulig å finne en enkel lukket formel for løsningen. I noen tilfeller er det imidlertid mulig, f.eks. når funksjonen $f$ er konstant. La $r \neq 0$ være et reellt tall og $c$ en konstant.

**Korollar 1.3.** *Differenslikningen*

$$x_{n+1} - rx_n = c$$

*har generell løsning*

$$x_n = r^n x_0 + c \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

*for alle $n \geq 0$.*

*Bevis.* Resultatet følger umiddelbart ved å sette inn $f(i) = c$ i formelen i Teorem 1.2.

$$x_n = r^n x_0 + c \sum_{i=0}^{n-1} r^{n-1-i} = r^n x_0 + c\frac{1-r^n}{1-r}$$

□

**Eksempel 3.** Vi kan inhomogenisere eksempel 1 og se på differenslikningen

$$x_{n+1} - 2x_n = 1$$

med initialbetingelse $x_0 = 1$. Fra korollaret får vi løsningen

$$x_n = x_0 \cdot 2^n + 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

**Eksempel 4.** På samme måte kan vi modifisere saueksemplet fra forrige seksjon. Som før starter vi med $x_0 = 100$ dyr og igjen har vi en årlig økning på 20 prosent. Men nå kjøper vi hver sommer inn 10 nye dyr. Hvor lang tid tar det da før vi har mer enn 200 dyr i flokken?

Modellen vil i dette tilfellet være gitt ved differenslikningen

$$x_{n+1} = 1,2 \cdot x_n + 10$$

med initialbetingelse $x_0 = 100$. Det gir

$$x_n = 100 \cdot 1,2^n + 10 \cdot \frac{1-1,2^n}{1-1,2} = 100 \cdot 1,2^n + \frac{10}{0,2}(1,2^n - 1) = 150 \cdot 1,2^n - 50$$

Kravet om at $x_n \geq 200$ gir oss en betingelse på $n$ gitt ved

$$150 \cdot 1,2^n - 50 \geq 200$$

eller

$$1,2^n \geq \frac{250}{150} = \frac{5}{3}$$

Vi tar logaritmen på begge sider og får

$$n \cdot \ln(1,2) \geq \ln 5 - \ln 3$$

som gir

$$n \geq \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln(1,2)} \approx 2,80$$

Vi må altså vente i 3 år før flokken har passert 200 dyr.

### Oppgaver til seksjon 1.3

1. Finn de generelle løsningene til differenslikningene.
   a) $x_{n+1} - x_n = 1$
   b) $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 1$
   c) $x_{n+1} + 3x_n = -1$
2. Finn en løsning av den gitte differenslikningen med initialbetingelse.
   a) $x_{n+1} - 2x_n = 2$, $x_0 = 4$
   a) $x_{n+1} - x_n = -1$, $x_0 = 0$
   a) $x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = 2$, $x_0 = 2$
3. Et fond har 50 MNOK i grunnkapital og gir 5% rente. Ved utgangen av året hvert år utbetales 2 MNOK fra fondet. Vi lar $x_n$ være kapitalen i fondet $n$ år etter etableringen. Vis at $x_n$ tilfredstiller likningen

   $$x_{n+1} = x_n \cdot 1,05 - 2, \qquad x_0 = 50$$

   Hvor stor kapital har fondet etter $n$ år?

4. Du deler en pizza med $n$ rette kutt slik at ingen kutt er parallelle og det aldri går tre kutt gjennom samme punkt. La $x_n$ være antall biter som kuttene deler pizzaen i og anta at oppkuttingen er gjort på en optimal måte i forhold til å maksimere antall biter. Vis at

$$x_{n+1} = x_n + n + 1$$

med $x_0 = 1$ og finn en formel for $x_n$.

1.4. **Andreordens homogene lineære differenslikninger.** Vårt innledende eksempel med Fibonaccis kaninmodell er et eksempel på en annenordens homogen differenslikning. Vi skal i dette avsnittet studere slike likninger og finne formler for løsningene av dem.

Vi betrakter differenslikninger på formen

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

Basert på erfaringene fra førsteordens likninger, prøver vi oss fram med funksjonen

$$x_n = Kr^n$$

for en konstant $K$. Innsetting gir

$$Kr^{n+2} + bKr^{n+1} + cKr^n = 0$$

Vi deler hele likningen med $Kr^n$ og får

$$r^2 + br + c = 0$$

som må være oppfylt for at vi skal ha en løsning. Dette polynomet kalles det **karakteristiske polynomet** til differenslikningen og dets røtter gir opphav til løsninger av differenslikningen.

1.5. **To reelle røtter.** La oss først se på det tilfellet der vi har to forskjellige, reelle røtter.

**Teorem 1.4.** *Løsningene til differenslikningen*

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

*er gitt ved*

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

*hvor $A$ og $B$ er konstanter og $r_1, r_2$ er røttene i det karakteristiske polynomet.*

*Bevis.* Vi har allerede sett at dersom $x_n = Kr^n$ skal være en løsning, så må $r$ være rot i det karakteristiske polynomet. Motsatt, så vil enhver lineærkombinasjon av de separate løsningene $x_n = Ar_1^n$ og $x_n = Br_2^n$ gi oss en løsning av likningen. Dette følger av at likningen er lineær og homogen og at derfor er løsningene additive, dvs. de kan summeres for å frambringe nye løsninger. Alternativt kan man forvisse seg om at dette stemmer ved rett og slett å sette inn $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ i likningen og se at det hele stemmer. □

**Eksempel 5.** Fibonaccis modell ga oss likningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

Det karakteristiske polynomet er gitt ved $r^2 - r - 1$ som vi setter lik 0 og får løsninger

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

og i henhold til resultatet over så er

$$x_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

I Fibonacci-følgen har vi $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$ som gir oss likningene

$$x_0 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 = A + B = 0$$
$$x_1 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) = 1$$

med løsning

$$A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dermed har vi formelen

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

Når vi lar $n \to \infty$ så vil leddet $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ bli dominerende i forhold til $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Det betyr at når $n \to \infty$ så vil også $x_n \to \infty$, så vi har ikke noen grense for følgen. Men vi kan se på forholdet mellom to påfølgende ledd:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})}{\frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}$$

Deler vi oppe og nede med $(1+\sqrt{5})^n$ får vi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^n}{1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^n}$$

Men nå er $|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}| < 1$, så når $n \to \infty$ vil de to bakerste leddene i teller og nevner gå mot 0 og vi står igjen med

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

**Eksempel 6.** Vi skal finne løsningen av differenslikningen

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$$

med initialbetingelse $x_0 = 1$, $x_1 = -2$.

Vi er altså ikke interessert i alle løsningene til likningen, men kun den som tilfredsstiller den oppgitte initialbetingelsen. Likevel lønner det seg å finne den generelle løsningen først. Den karakteristiske likningen

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

har røtter $r = 1$ og $r = 4$ og vi får

$$x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n$$

Setter vi inn for $n = 0$ og $n = 1$ får vi

$$1 = x_0 = A + B$$
$$-2 = x_1 = A + 4B$$

Vi trekker den øverste likningen fra den nederste og får

$$-3 = 3B$$

eller $B = -1$, som gir $A = 2$ ved å sette inn i den øverste likningen. Dermed får vi den spesielle løsningen

$$x_n = 2 - 4^n$$

**Eksempel 7.** Mia og Marius spiller om penger. I hver runde er regelen slik at den som taper må betale 1 krone til vinneren. De spiller til en av dem ikke har noen penger igjen. Mia er bedre til å spille enn Marius og hun vinner i gjennomsnitt 3 av 5 runder, men Marius starter med mer penger enn Mia, han starter med 15 kroner mot Mias 5. Hva er sannsynligheten for at det er Mia som til slutt sitter igjen med alle pengene?

Vi starter med å analysere spillet i en litt mer generell setting. Vi setter sannsynligheten for at Mia sitter igjen med alle pengene når hun starter med $n$ kroner til å være $x_n$.

Anta at Mia starter med $n$ kroner. Nå kan ett av to skje. Enten vinner Mia med sannsynlighet $\frac{3}{5}$ og får da en krone til før de spiller videre, eller så vinner Marius med sannsynlighet $\frac{2}{5}$ og Mia taper 1 krone. Sannsynligheten for at Mia vinner til slutt blir dermed splittet opp i to ledd, et ledd $\frac{3}{5}x_{n+1}$ er sannsynligheten for at hun vinner til slutt dersom hun vinner akkurat denne runden og det andre leddet, $\frac{2}{5}x_{n-1}$ som er sannsynligheten for at hun vinner til slutt dersom hun taper denne runden. Til sammen må dette gi sannsynligheten for at hun vinner når vi ikke vet utfallet av runden. Vi skriver dette som

$$x_n = \frac{3}{5}x_{n+1} + \frac{2}{5}x_{n-1}$$

Dersom vi bytter litt rundt på leddene og multipliserer med $\frac{5}{3}$ får vi likningen

$$x_{n+1} - \frac{5}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n-1} = 0$$

Den karakteristiske likningen

$$r^2 - \frac{5}{3}r + \frac{2}{3} = 0$$

har røtter $r_1 = 1$ og $r_2 = \frac{2}{3}$. Det gir generell løsning

$$x_n = A + B \cdot (\frac{2}{3})^n$$

I dette tilfellet har vi litt merkelige initialverdier. Det vi vet er at $x_0 = 0$ og $x_{20} = 1$ siden den første betyr at Mia ikke har noen penger og derfor helt sikkert taper, mens den andre betyr at Marius ikke har noen penger og Mia derfor helt sikkert vinner. Så oppgaven blir å løse ut $A$ og $B$ fra likningene

$$x_0 = 0 = A + B$$

$$x_{20} = 1 = A + B(\frac{2}{3})^{20}$$

Etter litt regning får vi

$$A = \frac{1}{1 - (\frac{2}{3})^{20}} \qquad B = \frac{-1}{1 - (\frac{2}{3})^{20}}$$

Dermed får vi

$$x_n = \frac{1}{1 - (\frac{2}{3})^{20}} - \frac{1}{1 - (\frac{2}{3})^{20}}(\frac{2}{3})^n = \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - (\frac{2}{3})^{20}}$$

Siden vi i vårt eksempel lot Mia starte med 5 kroner er det $x_5$ vi er interessert i og den beregner vi til

$$x_5 = \frac{1 - (\frac{2}{3})^5}{1 - (\frac{2}{3})^{20}} \approx 0,87$$

Det er altså 87 prosent sannsynlighet for at Mia vinner alle pengene til slutt, selv om hun faktisk bare starter med en tredel av det Marius starter med. Med andre ord, det er viktigere å være smart enn rik!

**Eksempel 8.** Vi tenker oss at vi skal overføre signaler over et datanett. Det er to typer signaler, det ene overføres i løpet av $1\mu s$ og det andre trenger $2\mu s$. Vi skal studere hvor mange ulike kombinasjoner av disse to signalene vi kan lage dersom vi har $n$ $\mu s$ til rådighet.

Vi begynner med å avklare at antall meldinger vi kan lage er gitt ved $x_n$. Meldingene slutter enten med en $1\mu s$-signal eller et $2\mu s$-signal og vi har henholdsvis $n-1$ og $n-2$ $\mu s$ til disposisjon. Det finnes $x_{n-1}$ forskjellige meldinger av lengde $(n-1)\mu s$, mens det finnes $x_{n-2}$ forskjellige meldinger av lengde $(n-2)\mu s$. Det gir til sammen $x_{n-1}+x_{n-2}$ mulige meldinger av lengde $n$ $\mu s$, eller formelen

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Initialbetingelsen gir seg selv, vi har kun én melding av lengde 1, mens vi har to av lengde 2 ($1+1$ og 2). Det betyr at $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$.

Dette er samme differenslikning vi så på for Fibonacci-tallene, bare med en annen initialbetingelse. Det betyr at vi har

$$x_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Initialbetingelsene $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ gir

$$x_1 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) = 1$$

$$x_2 = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = A(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + B\frac{3-\sqrt{5}}{2})$$

$$= \frac{3}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) = 2$$

med løsning

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Dermed har vi formelen

$$x_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

### Oppgaver til seksjon 1.5

1. Finn de generelle løsningene til differenslikningene.
   a) $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 0$
   b) $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 14x_n = 0$
   c) $x_{n+2} - 4x_n = 0$
2. Finn den spesielle løsningen av differenslikningen med den oppgitte initialbetingelsen.
   a) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$
   b) $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
   c) $x_{n+2} - x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
3. Bier formerer seg på en uvanlig måte. Både befruktede og ubefruktede egg utvikler seg til bier, de befruktede blir hunner og de ubefruktede blir hanner. En hunn har altså to foreldre, mens en hann bare har en mor og ikke en far. En hann har altså en forelder, to besteforeldre, tre oldeforeldre osv. Hvor mange forgjengere har den $k$ generasjoner tilbake?
4. a) Finn følgen $x_n$ slik at $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{9}{2}$ og
   $$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$$
   for $n \geq 0$.
   b) Vis at $2x_n$ er et helt tall for $n \geq 0$.

1.6. **To komplekse røtter.** I det neste tilfellet skal vi anta at det karakteristiske polynomet har to komplekse røtter, dvs at

$$r^2 + br + c = 0$$

har negativ diskriminant $\mathcal{D} = b^2 - 4c < 0$. Røttene er gitt ved

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}$$

eller på eksponensialform,

$$r = |r|e^{\pm i\theta}$$

Vi har tidligere sett hvordan vi kan regne om fra normalform til eksponensialform. Merk også at røttene har argument $\pm\theta$. Det er det samme som å si at røttene er kompleks konjugerte, noe vi leser direkte ut fra formelen for løsning av annengradslikninger.

Nå kan vi gjøre det samme som vi gjorde i det reelle tilfellet og vi får

$$\begin{aligned} x_n &= C(|r|e^{i\theta})^n + D(|r|e^{-i\theta})^n \\ &= C|r|^n e^{in\theta} + D|r|^n e^{-in\theta} \end{aligned}$$

Forskjellen er at vi nå antar at $C$ og $D$ er komplekse tall. Setter vi inn for de to første leddene får vi

$$\begin{aligned} x_0 &= C + D \\ x_1 &= Cr + D\overline{r} \end{aligned}$$

Vi kan løse dette likningssystemet med hensyn på $C$ og $D$ og får

$$C = \frac{\overline{r}x_0 - x_1}{\overline{r} - r} \qquad D = \frac{rx_0 - x_1}{r - \overline{r}}$$

Hvis vi kompleks konjugerer $D$ og husker på at $x_0$ og $x_1$ er reelle, i tillegg til at $\overline{r - \overline{r}} = \overline{r} - r$, får vi at $\overline{D} = C$ som er det samme som at $D = \overline{C}$, og løsningen blir

$$x_n = C|r|^n e^{in\theta} + \overline{C}|r|^n e^{-in\theta}$$

Vi setter inn $C = A + iB$ og $D = A - iB$ for reelle tall $A$ og $B$ og bruker at

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

samt at

$$e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

Dermed får vi (etter litt regning)

$$x_n = |r|^n(2A\cos n\theta - 2B\sin n\theta)$$

hvor altså imaginærdelen forsvinner, noe som passer bra med at $x_n$ faktisk er antatt å være reell. Dermed har vi vist følgende setning

**Teorem 1.5.** *La*

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

*være en annenordens, homogen differenslikning med reelle koeffisienter og slik at det karakteristiske polynomet har to komplekse røtter $r = \rho e^{i\theta}$ og $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$. Anta videre at initialverdiene $x_0$ og $x_1$ også er reelle tall. Da er løsningene til differenslikningen gitt ved*

$$x_n = K_1\rho^n\cos n\theta + K_2\rho^n\sin n\theta$$

*der $K_1$ og $K_2$ er fritt valgte reelle tall.*

**Eksempel 9.** Vi skal løse differenslikningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

med initialbetingelse $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Vi regner ut det karakteristiske polynomet

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

Dette polynomet har røtter $r_1 = -1 + i$ og $r_2 = -1 - i$. Disse røttene kan vi skrive på eksponensialform som

$$r_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad r_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

og det følger fra teoremet at

$$x_n = K_1(\sqrt{2})^n \cos(n\frac{3\pi}{4}) + K_2(\sqrt{2})^n \sin(n\frac{3\pi}{4})$$

Vi setter inn for $n = 0$ og $n = 1$ i dette uttrykket og får

$$x_0 = K_1 \cos 0 + K_2 \sin 0 = K_1 = 1$$

og videre ved å sette dette inn i uttrykket for $x_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= K_1 \cdot \sqrt{2}) \cos\frac{3\pi}{4} + K_2 \cdot \sqrt{2}) \sin\frac{3\pi}{4} \\ &= \sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}}) + K_2 \cdot \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1 + K_2 = 2 \end{aligned}$$

som gir $K_2 = 3$ og vi får spesiell løsning

$$x_n = (\sqrt{2})^n(\cos(\frac{3\pi n}{4}) + 3\sin(\frac{3\pi n}{4}))$$

### Oppgaver til seksjon 1.6

1. Finn den generelle løsningen til differenslikningene.
   a) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$
   b) $x_{n+2} + 9x_n = 0$
2. Finn løsningen av differenslikningen med den gitte initialbetingelsen.
   a) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$
   b) $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$
   c) $x_{n+2} + 4x_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 4$
3. I en enkel klimamodell avviker middeltemperaturen i måned nummer $n$ fra den årlige middeltemperaturen med en størrelse $x_n$. Anta at $x_n$ er gitt ved

   $$x_{n+2} - \sqrt{3}x_{n+1} + x_n = 0, \qquad x_{12} = -12, \qquad x_3 = -6$$

   I hvilken måned er det varmest og i hvilken er det kaldest. Tegn en kurve som viser svingningene fra måned til måned.
4. Vi har gitt en differenslikning ved

   $$x_{n+2} - x_n = 0$$

   a) Vis at likningen ikke har noen løsning når $x_0 = 0$ og $x_2 = 1$.
   b) Finn løsningen til likningen når $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$

## 2. Diskrete dynamiske systemer

2.1. **Introduksjon.** Differenslikninger er et eksempel på diskrete dynamiske systemer. Et diskret dynamisk system er en matematisk modell som er skreddersydd for å beskrive situasjoner der endringene skjer på et bestemt tidspunkt og ikke som en kontinuerlig prosess. For eksempel fødes alle lammene i en flokk om våren og det er mer hensiktsmessig å telle opp antall dyr en gang i året enn å gå ut fra en differensiallikningsmodell der det forutsettes at tilveksten skjer hele tiden.

Diskrete dynamiske systemer involverer som oftest iterasjonsprosesser. Det betyr at vi beskriver en prosess som vi gjentar mange ganger. Innenfor diskrete dynamiske systemer er prosessen beskrevet av en funksjon og det er denne funksjonene vi itererer.

I likhet med hva vi har sett for differensiallikninger er det ofte vankselig å finne eksakte løsninger av et diskret system. Vi må derfor basere oss på en kombinasjon av numeriske, analytiske og geometriske metoder for å forstå systemene. Selv med utstrakt bruk av slike teknikker er det ikke noen selvfølge at vi kan gi en fullstendig beskrivelse av et diskret dynamisk system.

Et diskret dynamisk system kan defineres formelt ved:

**Definisjon 2.1.** *La $f$ være en kontinuerlig funksjon definert på de reelle tall. Tallfølgen $\{x_n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ definert ved*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

*kalles et diskret dynamisk system.*

Sammenhengen med differenslikninger får vi ved f.eks. å betrakte funksjoner av typen $f(x_n) = r \cdot x_n + b$. I det tilfellet gir det diskrete dynamiske systemet en førsteordens lineær differenslikning

$$x_{n+1} = r \cdot x_n + b$$

2.2. **En modell for eksponensielle vekst.** Den eksponensielle vekstmodellen er en enkel, men kanskje litt urealistisk modell for veskt i en populasjon. I denne modellen antar vi at antallet individer i en generasjon for en populasjon er proporsjonal med antall individer i forrige generasjon.

Lar vi $P_n$ være antall individer i populasjonen ved utgangen av tidsperiode $n$ sier modellen at $P_{n+1} = kP_n$ og derfor

$$P_n = k^n P_0$$

Dersom $P_0 > 0$ og $k > 1$ så følger det at

$$P_n \to \infty \quad \text{når} \quad n \to \infty$$

Hvis $k = 1$ så vil $P_n = P_0$ for alle $n$.

Modellen har samme ulemper som den tilsvarende kontinuerlige versjonen, den passer bra for små populasjoner i store omgivelser, hvor det ikke finnes noen begrensninger for veksten. Hvis vi skal ta hensyn til at det finnes begrensinger for veksten av populasjonen må vi modifisere modellen.

2.3. **Logistisk differenslikning.** Hvis vi skal gjøre den eksponensielle vekstmodellen noe mer realistisk må vi ta hensyn til at veksten etter hvert fører til overbefolkning. Modifikasjonen er den samme som ligger inne i den kontinuerlige logistiske vekstmodellen.

De premissene vi legger inn i modellen er følgende:

i) Så lenge populasjonener er (relativt) liten er det et konstant forhold mellom antall individer i populasjonen ved utgangen av to etterfølgende generasjoner.

ii) Hvis populasjonen blir for stor, vil alle ressurser være oppbrukt og populasjonen vil dø ut.

Den andre antakelsen er litt forskjellig fra den tilsvarende antakelsen for den logistiske differensiallikningen. I det tilfelle oppnår vi en stabilisering av populasjonen, mens vi her opplever at populasjonen dør ut.

En modell som tilfredstiller disse antakelsene er gitt ved

$$P_{n+1} = kP_n(1 - \frac{P_n}{M})$$

Som før er $P_n$ størrelsen på populasjonen ved utgangen av generasjon $n$ og $P_0$ er den initiale størrelsen på populasjonen. Merk at når $P_n$ er liten så vil leddet $(1 - \frac{P_n}{M})$ være veldig nær 1, og vi har en tilnærmet eksponensiell vekstmodell. På den annen side så vil $P_n = M$ føre til at $P_{n+1} = 0$, slik vi har antatt i ii).

I stedet for å regne med absolutte tall for populasjonen kan vi la $P_n$ være andelen av populasjonens maksimumsstørrelse, dvs. vi antar $M = 1$. Det gir oss det som normalt kalles den diskrete logistiske likningen

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

Denne skiller seg fra differenslikningene ved at den ikke er lineær, $P_n$ inngår i uttrykket med en andrepotens.

Vi kan regne ut de første verdiene av $P_n$ for noen verdier av $k$.

| $n$ | $k = 1,5$ | $k = 3,2$ | $k = 3,5$ | $k = 3,9$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,3750 | 0,8000 | 0,8750 | 0,9750 |
| 2 | 0,3515 | 0,5120 | 0,3828 | 0,0950 |
| 3 | 0,3419 | 0,7995 | 0,8269 | 0,3355 |
| 4 | 0,3375 | 0,5128 | 0,5008 | 0,8694 |
| 5 | 0,3354 | 0,7995 | 0,8749 | 0,4426 |
| 6 | 0,3343 | 0,5130 | 0,3828 | 0,9621 |
| 7 | 0,3338 | 0,7995 | 0,8269 | 0,1419 |
| 8 | 0,3335 | 0,5130 | 0,5008 | 0,4750 |
| 9 | 0,3334 | 0,7995 | 0,8749 | 0,9725 |
| 10 | 0,3333 | 0,5130 | 0,3828 | 0,1040 |
| 11 | 0,3333 | 0,7995 | 0,8269 | 0,3634 |
| 12 | 0,3333 | 0,5130 | 0,5008 | 0,9022 |

Tabellen viser at den logistiske modellen kan ha svært forskjellige forløp. For $k = 1,5$ har vi tilsynelatende en stabilisering av populasjonen på et likevektsnivå, mens vi for $k = 3,9$ ikke finner noe system i det hele tatt. For $k = 3,2$ og $k = 3,5$ finner vi et annet fenomen, nemlig en likevektstilstand bestående av sykler, av lengde 2 og 4 henholdsvis.

For den diskrete logistiske modellen er problemet med å finne sukssessive populasjoner det samme som å iterere en kvadratisk funksjon på formen

$$Q_k(x) = kx(1 - x)$$

Hovedoppgaven innen diskret dynamikk er å beskrive banen

$$P_1 = Q_k(P_0), P_2 = Q_k(P_1), P_3 = Q_k(P_2), \ldots$$

Som vi kanskje forstår av eksemplet over er det ikke noen enkel formel som løser dette problemet. I det neste kapittelet skal vi se litt nærmere på dette problemet.

### Oppgaver til seksjon 2.2 og 2.3

1. En logistisk vekstmodell som stabiliserer seg oppfyller betingelsen

$$P_n = kP_n(1 - P_n)$$

for $n$ stor. Finn $P_n$ uttrykt ved $k$ i dette tilfellet.

2. Et diskret dynamisk system er gitt ved
$$x_{n+1} = x_n^2 - 6$$
Finn en verdi for $x_n$ slik at systemet stabiliseres på denne verdien.

2.4. **Fikspunkter og periodiske orbiter.** Et diskret dynamisk system som stabiliserer seg på en bestemt verdi må oppfylle $F^n(P) = F^{n+1}(P)$ for store $n$. Det betyr at vi er interessert i verider $x$ som oppfyller $x = F(x)$ eller såkalte fikspunkter for fuksjonen $F$. For en kvadratisk funksjon $F(x) = ax^2 + bx + c$ er dette det samme som å løse likningen $F(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c = 0$, dvs
$$x = \frac{1 - b \pm \sqrt{b^2 - 2b + 1 - 4ac}}{2a}$$
For den logistiske modellen i forrige avsnitt har vi $a = -k$, $b = k$ og $c = 0$. Dette gir
$$x = \frac{1 - k \pm \sqrt{k^2 - 2k + 1}}{-2k} = \frac{1 - k \pm (k-1)}{-2k}$$
som betyr $x_0 = 0$ eller $x_0 = 1 - \frac{1}{k}$.

**Eksempel 11.** Vi kan bruke dette til å finne fikspunktene til det kvadratiske systemet
$$Q_k(x) = kx(1-x)$$
for ulike valg av $k$.

Som vi har sett over er fikspunktene til $Q_k$ gitt ved $x_0 = 1 - \frac{1}{k}$. For $k = 1,5$ (jfr. tabellen over) får vi $x_0 = 1 - \frac{1}{1,5} = \frac{1}{3}$, slik vi så av tabellen. Men vi merker oss at for alle ikke-trivielle valg for $k$ så har vi et fikspunkt, men for å komme dit er vi avhengig av riktig valg av startverdi.

I tabellen observerte vi også at ved riktig valg av $k$ og startverdi gikk iterasjonsprosessen inn i en sykel. Vi skal se hvordan vi for det kvadratiske systemet
$$Q_k(x) = kx(1-x)$$
kan finne syklene av lengde 2. Det betyr at vi har to verdier, $x_n$ og $x_{n+1}$, som vi for enkelhets skyld kaller $x$ og $y$, og som oppfyller
$$y = Q_k(x) = kx(1-x)$$
$$x = Q_k(y) = ky(1-y)$$

Setter vi den nederste likningen inn i den øverste får vi
$$y = k(ky(1-y))(1-(ky(1-y)) = k^2y - k^2y^2 - k^3y^2 + k^3y^3 + k^3y^3 - k^3y^4$$
Hvis vi ser bort fra løsningen $y = 0$ kan vi forkorte med $y$ og ordne leddene litt. Dermed ender vi opp med en tredjegradslikning
$$k^3y^3 - 2k^3y^2 + (k^3 + k^2)y - (k^2 + 1) = 0$$
i $y$. Løsningene på vårt 2-sykel-problem er gitt ved røttene til denne likningen.

Det er generelt vanskelig å finne løsningene til en kubisk likning, men i dette tilfellet får vi litt hjelp av det vi har gjort over. En 1-sykel, eller fikspunkt, må nemlig også være en 2-sykel. Det betyr at løsningen $y = 1 - \frac{1}{k}$ må passe inn i tredjegradslikningen, så vi deler ut med det lineære leddet $ky - k - 1$. Det gir
$$k^3y^3 - 2k^3y^2 + (k^3 + k^2)y - (k^2 + 1) = (ky - k - 1)(k^2y^2 - (k^2 + k)y + (k + 1))$$
og vi kan finne de andre røttene ved å løse annengradslikningen
$$k^2y^2 - (k^2 + k)y + (k + 1) = 0$$

Denne har røtter

$$\begin{aligned} y &= \frac{k^2+k \pm \sqrt{(k^2+k)^2 - 4k^2(k+1)}}{2k^2} \\ &= \frac{k^2+k \pm \sqrt{k^4+2k^3+k^2-4k^3-4k^2}}{2k^2} \\ &= \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2-2k-3}}{2k} \end{aligned}$$

Det betyr at for ethvert valg av $k$ så får vi en 2-sykel ved å velge $y$ på denne måten.

**Eksempel 12.** I tabellen fant vi en 2-sykel for $k = 3,2$. Setter vi det inn i formelen finner vi to mulige $y$-verdier som gir oss en 2-sykel, nemlig

$$y_\pm = \frac{3,2+1 \pm \sqrt{(3,2)^2 - 2\cdot 3,2 - 3}}{2\cdot 3,2} = \frac{4,2 \pm \sqrt{0,84}}{6,4}$$

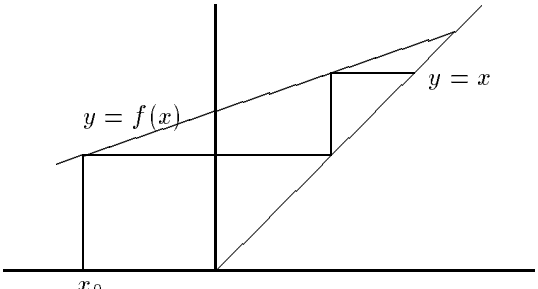
Disse kan vi regne ut og vi får $y_+ \approx 0,79945549$ og $y_- \approx 0,51304451$ som stemmer overens med verdiene i tabellen.

Tilsvarende kan vi for (nesten) alle verdier av $k$ finne 2-sykler på denne måten. De $k$ som ikke gir oss 2-sykler er $k = -1$ og $k = 3$. For disse verdiene har annengradslikningen sammenfallende røtter gitt ved

$$y = \frac{k+1}{2k}$$

og 2-syklene kollapser til fikspunkter. Vi har altså ingen ekte 2-sykler.

Iterasjonsprosesser kan på en illustrerende måte framstilles grafisk. For enkelthets skyld skal vi bruke en lineær funksjon i stedet for en parabel, det blir enklere typografisk, men prinsippet er akkurat det samme




Illustrasjonen viser $xy$-planet, med grafen til $y = f(x)$ og linja $y = x$ inntegnet. Vi starter med en $x$-verdi, $x_0$ og trekker en vertikal linje opp til punktet $(x_0, f(x_0))$. Herfra trekker vi en horisontal linje bort til linja $y = x$ og vi treffer den i punktet $(f(x_0), f(x_0))$. Så gjentar vi prosessen, først en vertikal linje opp til grafen til $y = f(x)$ som produserer punktet $(f(x_0), f(f(x_0)))$, og deretter horisontalt til $y = x$ som dermed treffer i punktet $(f(f(x_0)), f(f(x_0)))$. Slik kan vi i prinsippet fortsette i det uendelige. Dersom prosessen nærmer seg mer og mer mot ett bestemt punkt, vil dette være et fikspunkt. Hvis prosessen går inn i en loop har vi funnet en sykel. Spesielt vil en 2-sykel bli framstilt av en liten firkantbevegelse.

### Oppgaver til seksjon 2.4

1. Tegn en figur som viser itereringsprosessen for den kvadratiske funksjonen $Q_1(x) = x(1-x)$. Start med litt forskjellige verdier og se hva som skjer.
2. Gjør tilsvarende som i oppgave 1. med funksjonen $Q_3 = 3x(1-x)$. Hva ser du?

## 3. Multippel integrasjon

3.1. **Introduksjon.** La oss starte med en kort rekapitulasjon av envariabelteorien. La $f$ være en funksjon som er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$. Integralet

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

er definert gjennom følgende egenskap: Dersom vi deriverer $F(x)$ med hensyn på $x$ så får vi integranden $f(x)$ tilbake. Vi skriver dette som

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(x)\, dx = f(x)$$

Dette er den mest fundamentale egenskapen ved integralet og faktisk den egenskapen som er grunnlaget for hele differensial- og integralregningen.

Vi kan også tolke integralet som et areal. Anta først at $f$ er positiv på hele intervallet $[a, b]$. Da er verdien av integralet

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

lik med arealet over intervallet $[a, b]$ mellom $x$-aksen og grafen til $f$. Dersom funksjonen ikke er positiv på hele intervallet, så kan vi fortsatt holde på den geometriske tolkningen, forskjellen blir at i det området der funksjonen er negativ, så får vi størrelsen på arealet med negativt fortegn.

Denne geometriske tolkningen henger sammen med oppfattelsen av integralet som grenseverdien for en *Riemannsum*. Vi tenker oss at vi deler intervallet $[a, b]$ opp i en rekke delintervaller ved hjelp av delingspunkter

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

og at vi velger ut et punkt $x_i$ i hvert delintervall, altså $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. Da vil summen (som vi kaller en Riemannsum)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

være en god approksimasjon til integralet $\int_a^b f(x)dx$. Jo kortere hvert delintervall er, jo bedre approksimasjon. Vi kan godt anta at alle delintervallene har samme lengde, vi kaller denne lengden $\Delta x$. Går vi til grensen, dvs. lar vi $\Delta x \to 0$, så får vi likhet

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

3.2. **Dobbeltintegrasjon over et rektangulært område.** Vi btrakter nå en funksjon i to variable, $f(x, y)$, definert på et rektangulært område $R = [a, b] \times [c, d]$ i $xy$-planet. Vi antar for enkelhets skyld at funksjonen er positiv i $R$. I analogi med hvordan vi i envariabelteorien tolket integralet som arealet mellom $x$-aksen og grafen til funksjonen, skal vi tolke dobbeltintegralet som et volum $L$ under grafen og over $xy$-planet. En presis beskrivelse av dette volumet er gitt ved:

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (x, y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Senere skal vi se at vi kan få til dobbeltintegralet over mer vilkårlige områder i $xy$-planet. Dette er en stor forskjell mellom en- og fler-variabelteoriene, i envariabelteorien er integrasjonsområdet alltid et intervall, mens det i flervariabelteorien kan ha mange forskjellige former. Dette gjør flervariabelteorien mye vanskeligere, men også mer interessant.

La oss gå tilbake til området $L$ gitt ovenfor. Vi følger tankegangen for Riemann-summer og deler opp legemet $L$ i uendelig tynne skiver ved å legge snitt parallelt med $xz$-planet. Disse snittene er gitt ved at vi spesifiserer en verdi for $y$, som vi kaller $y_0$. Da får vi arealet $A(y_0)$ av skiva gitt som et vanlig integral,

$$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$$

Dermed har vi fått en ny funksjon $A = A(y)$ som uttrykker arealet av disse skivene. Denne kan vi så integrere på vanlig måte og regne ut

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

Den verdien $V$ vi da får gir oss volumet av legemet $L$. Setter vi de to integrasjonene sammen får vi uttrykket

$$V = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)\, dx) dy$$

Vi har altså bestemt dette volumet ved først å integrere $f$ med hensyn på $x$ og betrakte $y$ som en konstant, for deretter å integrere det vi da får med hensyn på $y$. Denne metoden kalles *iterert integrasjon* eller *gjentatt integrasjon*.

**Eksempel 13.** Vi skal finne volumet $V$ som avgrenses av $xy$-planet, grafen til $f(x, y) = xy$ og over rektangelet $R = [0, 5] \times [1, 6]$ i $xy$-planet.

Volumet er gitt ved dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} V &= \int_1^6 (\int_0^5 xy\, dx) dy = \int_1^6 ([\frac{1}{2}x^2 y]_0^5\, dy = \int_1^6 \frac{25}{2} y\, dy \\ &= \frac{25}{2}[\frac{1}{2}y^2]_1^6 = \frac{25 \cdot 35}{4} \end{aligned}$$

Det er nærliggende å forsøke å gjøre oppdelingen motsatt, begynne med $y$ og avslutte med $x$. Det gir oss dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 (\int_1^6 xy\, dy) dx = \int_0^5 ([\frac{1}{2}xy^2]_1^6\, dx = \int_0^5 \frac{35}{2} x\, dx \\ &= \frac{35}{2}[\frac{1}{2}x^2]_0^5 = \frac{25 \cdot 35}{4} \end{aligned}$$

og vi får samme svar. Dette er på ingen måte overraskende når vi vet at vi beregner et volum. Volumet må jo være det samme uansett beregningsmåte.

Som en konsekvens av denne uavhengigheten av valg av rekkefølge på integrasjonene kan vi innføre en mer generell notasjon. Vi skriver

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$$

for dobbeltintegralet av $f$ over området $R$. Dersom $R = [a, b] \times [c, d]$ er et rektangel som ovenfor kan vi beregne dobbeltintegralet ved gjenntatt integrasjon på to måter:

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)\, dx) dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\, dy) dx$$

En annen bemerkning er at vi ikke nødvendigvis trenger å anta at $f$ er positiv i hele $R$. Dobbeltintegralet kan likevel beregnes ved gjenntatt integrasjon, forskjellen er at i det tilfelle er det ikke volumet av legemet vi finner, men noe vi kunne kalle det "algebraiske" volumet, der det som ligger under $xy$-planet teller negativt og det som ligger over teller positivt. Dette er vi imidlertid godt kjent med fra envariabelteorien.

**Oppgaver til seksjon 3.2**

1. Beregn dobbeltintegralet $\int\int_D f(x,y)dx\,dy$ for
   a) $f(x,y) = xy^3e^{x^2y^2}$, hvor $D = [1,3]\times[1,2]$.
   b) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y+1}$, hvor $D = [1,4]\times[1,2]$.
   c) $f(x,y) = y^5 \sin xe^{y^3\cos x}$, hvor $D = [0,1]\times[-1,0]$.
2. Beregn dobbeltintegralet $\int\int_D f(x,y)dx\,dy$ for
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, hvor $D = [-1,1]\times[-1,1]$.
   b) $f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4$, hvor $D = [0,1]\times[0,1]$.
   c) $f(x,y) = xe^{xy}$, hvor $D = [0,1]\times[0,1]$.
3. Finn volumet av legemet som ligger mellom området $[0,1]\times[0,1]$ i $xy$-planet og grafen til funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2$.
4. En eske har grunnflate $G = [-1,1]\times[-1,1]$ og høyde gitt ved funksjonen $g(x,y) = 4 - |x| - |y|$. Finn volumet av esken.

3.3. **Dobbeltintegral over andre områder.** Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, nemlig områder som ligger mellom to grafer. Vi begynner med de områdene vi kaller type 1. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

For enkelthets skyld skal vi anta at funksjonen vi skal integrere $f(x,y)$ er positiv i hele området $D$ og vi tenker os at vi skal beregne volumet av legemet mellom $xy$-planet og grafen til $f$ over området $D$.

Vi bruker samme framgangsmåte som for rektangler og legger snitt parallelt med $yz$-planet. Slike snitt er gitt ved likningen $x = t$. Arealet av et slikt snitt er et enkelt areal. Siden vi i øyeblikket har bestemt oss for at $x = t$, så vil $y$-koordinaten i snittet tilfredsstille $g(t) \le y \le h(t)$, mens $z$-koordinaten tilfredstiller $0 \le z \le f(t,y)$. Vi ser at arealet av snittet er lik arealet av området mellom $y$-aksen og grafen til $f(t,y)$ (der det nå er $y$ som er den variable) over intervallet $[g(t),h(t)]$. Derfor er dette arealet lik

$$A(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t,y)\,dy$$

En tilsvarende proses som den vi gjennomførte ovenfor, med tilnærming ved hjelp av "rette ", tynne skiver, og en grenseovergang der tykkelsen på skivene går mot 0 gir oss følgende uttrykk for volumet av legemet

$$V(t) = \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy)dx$$

Igjen er dette er iterert integrasjon, men i motsetning til hva vi fant ovenfor for rektangler, er grensene i det innerste rektangelet nå funksjoner av $x$.

**Eksempel 14.** La $D$ være området gitt ved ulikhetene $1 \le x \le 2$ og $0 \le y \le x^2$. Finn dobbeltintegralet

$$\int\int_D xy\,dx\,dy$$

I dette eksemplet er $g(x) = 0$ og $h(x) = x^2$. Det gir

$$\begin{aligned}\int\int_D xy\,dx\,dy &= \int_1^2 (\int_0^{x^2} xy\,dy)dx = \int_1^2 [\frac{1}{2}xy^2\,dy]_0^{x^2})dx = \int_1^2 \frac{1}{2}x^5\,dx \\ &= [\frac{1}{12}x^6]_1^2 = \frac{63}{12}\end{aligned}$$

Vi har nå sett på områder av type I. Det finnes også, selvsagt, områder av type II. Disse avgrenses av kurver på formen $x = g(y)$, altså grafer der $x$-aksen og $y$-aksen har byttet roller. Den presise formen på et slikt område er

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

og formelen for dobbeltintegralet av en funksjon $f(x, y)$ over et slikt område er gitt ved

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \Big(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\Big) dy$$

Her må vi altså først integrere med hensyn på $y$, for deretter å integrere med hensyn på $x$.

Det er viktig å merke seg at i begge de to tilfellene er det ikke nødvendigvis mulig å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, det kan vi kun gjøre dersom området både er av type I og av type II.

**Eksempel 15.** Beregn dobbeltintegralet $\int\int_D y^2 \sin xy\, dxdy$ der $D$ er området mellom $x = y$ og $x = 0$ og der $y \in [0, a]$. Vi regner ut

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^a \Big(\int_0^y y^2 \sin xy\, dy\Big) dx \\ &= -\int_0^a y \cos y^2\, dy \\ &= \frac{1 - \sin a^2}{2}\end{aligned}$$

### Oppgaver til seksjon 3.3

1. Beregn dobbeltintegralene. Skisser og identifiser området $D$ etter hvilken type det er.
   a) $\int_2^4 \int_{y^2-1}^{y^3} 3\, dx\, dy$
   b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x + y)^2\, dy\, dx$
   c) $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y}\, dx\, dy$
2. Finn dobbeltintegralet $\int\int_D f(x, y) dx\, dy$ for
   a) $f(x, y) = x - y$, hvor $D$ er trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(2, 1)$.
   b) $f(x, y) = x^3 y + \cos x$, hvor $D$ er trekanten definert ved $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq x$.
   c) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2$, hvor $D$ er området i $xy$-planet begrenset av grafen til $y = -x^2 + x$, $x$-aksen og linjene $x = 0$ og $x = 2$.
3. Beregn volumet under grafen til $f(x, y) = 1 + \sin \frac{\pi y}{2} + x$ over parallellogrammet i $xy$-planet med hjørner $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ og $(3, 2)$.
4. Finn gjennomsnittsverdien av $x^2 + y^2$ over følgende områder:
   a) Kvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$
   b) Kvadratet $[a, a + 1] \times [0, 1]$, hvor $a > 0$.
   c) Kvadratet $[0, a] \times [0, a]$, hvor $a > 0$.

3.4. **Areal og tyngdepunkt.** Vi kan bruke dobbeltintegrasjon til å finne arealet til et område i $xy$-planet. Det gjør vi ved å betrakte konstantfunksjonen $f(x, y) = 1$ over det området vi skal finne arealet av. Det legemet vi da beregner volumet av vil være en sylindrisk boks med grunnflate lik området i $xy$-planet og høyde 1, og arealet får nøyaktig samme verdi som volumet. Vi kan se på et eksempel.

**Eksempel 16.** Vi skal finne arealet av området i $xy$-planet som ligger inni parabelen $y = x^2$, under $y = 1$ og mellom $x = -1$ og $x = 1$. Vi beregner dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}[y]_{x^2}^{1}\,dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx \\ &= [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 - \frac{1}{3}(-1)^3) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vi kan bruke en tilsvarende teknikk for å finne tyngdepunktet av et areal i planet. Tyngdepunktet av et område $D$ i planet er det punktet som ligger mest midt i området. Det betyr at dersom vi kutter ut området på en papplate og setter platen på toppen av en passerspiss, så vil platen balansere dersom vi har satt passerspissen i tyngdepunktet. Man kan vise at vi finner koordinatene til dette punktet, som vi kaller $(\overline{x}, \overline{y})$ ved formelene

$$\overline{x}A = \int\int_D x\,dx\,dy \qquad \overline{y}A = \int\int_D y\,dx\,dy$$

der $A$ er arealet av området $D$. Vi skal ikke gi noe bevis for formelene, bare nevne at argumentet bruker bestemte Riemannsummer.

**Eksempel 17.** Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje $a$ og høyde $h$. Vi legger de tre hjørnene i punktene $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$ og $(0, h)$. Siden trekanten stikker like mye ut på hver side av $y$-aksen vil et enkelt symmetriargument gi at $\overline{x} = 0$. Her trenger vi ikke å regne noe som helst. For å finne $y$-koordinaten deler vi trekanten i to og betrakter den delen som ligger i første kvadrant. Det er intuitivt nokså opplaget at $y$-koordinaten til denne halve trekanten er den samme som for hele trekanten. Det betyr at området vi skal integrere over er gitt ved at $0 \le x \le \frac{a}{2}$ og $0 \le y \le h - \frac{2h}{a}x$. Den siste ulikheten får vi fra uttrykket som gir hypotenusen i den halve trekanten, nemlig $y = h - \frac{2h}{a}x$. Arealet av denne trekanten vet vi er $A = \frac{ah}{2}$ og formelen over gir oss

$$\begin{aligned} \overline{y} \cdot \frac{ah}{2} &= \int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{h-\frac{2h}{a}x} y\,dy\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}}[\frac{y^2}{2}]_0^{h-\frac{2h}{a}x}\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}}(h - \frac{2h}{a}x)^2\,dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} h^2 - \frac{4h^2}{a}x + \frac{4h^2}{a^2}x^2\,dx = [h^2x - \frac{2h^2}{a}x^2 + \frac{4h^2}{3a^2}x^3]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= h^2\frac{a}{2} - \frac{2h^2}{a}(\frac{a}{2})^2 + \frac{4h^2}{3a^2}(\frac{a}{2})^3 = ah^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = ah^2\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Deler vi ut får vi at $\overline{y} = \frac{1}{3}h$ som er $y$-koordinaten til tyngdepunktet.

### Oppgaver til seksjon 3.4

1. Finn tyngdepunktet til området i $xy$-planet som ligger mellom grafen til $y = 1 - x^2$ og $-1 \le x \le 1$ på $x$-aksen.
2. a) Finn arealet til området i $xy$-planet som ligger mellom grafene til $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$, og for $0 \le x \le 1$.
   b) Finn tyngdepunktet til området beskrevet i oppg. a).

## 4. Vektorfelt i planet

4.1. **Introduksjon.** Vi har tidligere sett på retningsdiagram og brukt disse til å konstruere løsninger til differensiallikninger. Vi skal i dette avsnittet se på denne problemstillingen fra en litt annen synsvinkel.

Vi begynner med definisjonen av et vektorfelt.

**Definisjon 4.1.** *La $f_1(x,y)$ og $f_2(x,y)$ være kontinuerlige funksjoner i to variable definert på et område $R$ i $xy$-planet. En funksjon $\mathbf{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ definert ved*

$$\mathbf{F}(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$$

*kalles et kontinuerlig vektorfelt.*

Vi begrenser oss her til vektorfelt i planet. En mer generell definisjon av et vektorfelt er som en funksjon $\mathbf{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ der $n$ og $m$ er vilkårlige positive heltall.

Et vektorfelt kan altså betraktes som en generalisering av funksjonsbegrepet.

4.2. **Mer om gradienter.** Retningsdiagrammet til en funksjon $y=f(x)$ er et eksempel på et vektorfelt. Gitt en funksjon $y=f(x)$. Vi kan sette opp et uttrykk for tangentene til grafen til $f$ ved vektorene $(1,f'(x))$. Dette gir oss et vektorfelt ved å sette $f_1(x,y)=1$ og $f_2(x,y)=f'(x))$. Nå vet vi at funksjonene $y=f(x)+C$ gir oss alle løsningskurvene til dette vektorfeltet. Dette kan vi forsøke å generalisere.

Vi tenker oss at vi har gitt et vektorfelt $\mathbf{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$. Denne funksjonen tilordner til et hvert punkt i planet en vektor. Et naturlig spørsmål vi kan stille er om det finnes en plan kurve som følger dette vektorfeltet, altså om det finnes det vi har kalt en løsningskurve.

**Eksempel 18.** Vi skal først se på problemet i motsatt retning. Vi tenker oss da at vi har gitt en kurve, f.eks. $g(x,y)=x^2y+y+1=0$. Gradienten til kurven peker i hvert punkt på kurven i en retning som står vinkelrett på tangenten til kurven. I vårt tilfelle er gradienten gitt ved

$$\nabla g(x,y)=(2xy,x^2+1)$$

Nå er vi mer interessert i vektorer langs med kurven, mer enn vektorer på tvers av kurven. Det betyr at for å skrive opp et pildiagram som følger den gitte kurven, så må vi se på vektorene

$$\nabla g(x,y)^\perp=(x^2+1,-2xy)$$

Tar vi utgangspunkt i dette vektorfeltet, så blir spørsmålet det motsatte, betrakt et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet. Kan vi finne en funksjon slik at vektorfeltet er gradienten til denne funksjonen? I vårt tilfelle kan vi det (pr. konstruksjon) og nivåkurvene til denne funksjonen gir oss presis løsningskurver til vektorfeltet $\nabla g(x,y)^\perp$.

Slike funksjoner er så betydningsfulle at de har fått et eget navn.

**Definisjon 4.2.** *Anta at et vektorfelt $\mathbf{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ kan skrives som gradienten til en funksjon $f=f(x,y)$, dvs. $\mathbf{F}=\nabla f$. Da kalles $f$ et potensial for $\mathbf{F}$.*

**Eksempel 19.** Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som følger dette vektorfeltet, dvs. som i hvert punkt på kurven har tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet $(1,0)$.

Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^\perp(x,y)=(x,y)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet $(1,0)$ så er det nivåkurven til $f$ gitt ved $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}$ vi er ute etter.

Detter bringer oss til følgende generelle problemstilling: *Gitt et vektorfelt* $\boldsymbol{F}$*. Finn en betingelse for at vektorfeltet har et potensial.*

Det neste teoremet gir en nødvendig betingelse for eksistens av et potensial.

**Teorem 4.3.** *La* $\mathbf{F}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ *være et kontinuerlig deriverbart vektorfelt definert på et åpent område* $D$ *i planet. Da er en nødvendig betingelse for at* $\mathbf{F}$ *er en gradient gitt ved*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

*Bevis.* Dersom $\mathbf{F}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ er en gradient med potensial $f(x,y)$, så har vi

$$f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{og} \qquad f_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Men det betyr at

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

□

Merk at dette kun er en nødvendig betingelse, det trenger ikke å finnes noe potensial selv om derivasjons-betingelsen er oppfylt. Men dersom den ikke er oppfylt så finnes det helt sikkert ikke noe potensial.

Teoremet sier heller ikke noe om hvordan man finner dette potensialet, men det kan man få til med litt prøving og feiling slik det neste eksempelet viser.

**Eksempel 20.** Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Vi skal teste om vektorfeltet kan ha et potensial.

Vi starter med å gjøre derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4) = 8xy^3 \qquad \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3) = 8xy^3$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $f = f(x,y)$. I så fall har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2y^3$$

Integrerer vi $2xy^4$ med hensyn på $x$ får vi $x^2y^4 + g(y)$, der $g(y)$ er en funksjon kun i $y$ og som går på 0 når vi deriverer med hensyn på $x$. Det enkleste er nå å derivere denne funksjonen med hensyn på $y$ og sammenlikne med uttrykket over.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + g(y)) = 4x^2y^3 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $4x^2y^3$ slutter vi at $g'(y) = 0$ eller at $g(y) = K$ en konstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x,y) = x^2y^4 + K$$

### Oppgaver til seksjon 4.2

1. Avgjør om vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ har et potensial, og finn i så fall dette.
2. Avgjør om vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (\sin x, \cos x)$ har et potensial, og finn i så fall dette.
3. Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (-x^2, 2xy + 2)$.
   a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ har et potensial.

b) Finn et potensial for $\mathbf{F}$.
c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(1, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.