Obligatorisk oppgave i MAT 1300, Våren 2005

Innleveringfrist: Fredag, 22 April 2005, 14.30 på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etg i N.H. Abels hus). Lever oppgavene i god tid for å unngå kødannelse. Husk å skrive navn og kursnummer på besvarelsen! Dersom du på grunn av sykdom eller lignende har behov for å utsette innleveringen, må du sende søknad til Elisabeth Seland (rom B 718, N.H. Abels hus, epost: studieinfo@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Husk at sykdom må dokumenteres ved legeattest! Se forøvrig http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml for nærmere informasjon om reglementet rundt obligatoriske oppgaver ved matematisk institutt. Oppgaven er obligatorisk og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha svart korrekt på minst halvparten av spørsmålene. Du kan få uttelling på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til et endelig svar, og det er derfor viktig at du leverer inn det du har kommet frem til. Det er lov å samarbeide og bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg (for hånd eller på datamaskin) og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Svarene skal begrunnes.

Av oppgavene er 1b) og 2 "nøtter" mens resten er "metodeoppgaver"

Oppgave 1

(Dette er oppgave 5.6 H i D.D.)

a) Vis at en kontinuerlig reell funksjon på $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ikke kan anta *enhver* reell verdi *nøyaktig to ganger*.

b) Finn en kontinuerlig reell funksjon på $\mathbb{R}$ som antar *enhver* reell verdi *nøyaktig tre ganger*.

Oppgave 2

Hvis A, B er undermengder av et normert vektorrom, setter vi

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B)$$

I oppgave 3 i underveiseksamenen ble det vist at hvis A er lukket og B er kompakt så er $A + B$ lukket og hvis A og B er kompakte er $A + B$ kompakt. Hvis vi nå bare antar at A og B er lukkete, kan vi slutte at $A + B$ er lukket? Hvis svaret er ja så bevis det, men hvis svaret er nei så finn et moteksempel.

Oppgave 3

(Dette er en versjon av oppgave 8.1 F i D.D.)

a) Vis at funksjonsfølgen

$$f_n(x) = n \sin(x/n)$$

konvergerer punktvis og finn grensen.

b) Vis at følgen konvergerer uniformt på hvert lukket intervall $[-R, R]$.

c) Vis at følgen ikke konvergerer uniformt på $\mathbb{R}$.

Oppgave 4

La ϕ være en kontinuerlig begrenset reell funksjon på stripen

$$[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$$

i $\mathbb{R}^2$. La $c \in \mathbb{R}$, og definer en følge $y_n \in C([0,1])$ rekursivt ved

$$y_0(x) = c$$
$$y_{n+1}(x) = c + \int_0^x \phi(t, y_n(t))dt$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Vis at de deriverte y_n' av funksjonene i følgen $\{y_n\}$ er begrenset av en konstant uavhengig av n, og at denne følgen danner en ekvikontinuerlig familie av funksjoner på $[0,1]$.

b) Kombiner dette med Arzela-Ascolis teorem (Teorem 8.6.9) samt integral konvergens teoremet (Teorem 8.3.1) til å vise at problemet som består av differensialligningen

$$y'(x) = \phi(x, y(x)), \qquad x \in [0,1]$$

og initialbetingelsen

$$y(0) = c$$

har en løsning. (Løsningen er ikke nødvendigvis entydig uten flere betingelser på ϕ.)