MAT1000 9/6-04

Ettersom det avholdes informatikkeksamen for noen studenter som har MAT1000 som programfag, legger jeg ut dette utkastet til løsning av relevante oppgaver fra eksamen 9/6-04, gjennomgått 1/12-06. Oppgaveteksten blir ikke gjengitt her. Den kan lastes ned fra nettet, følg anvisninger på emnets hjemmeside

Oppgave 1

a) $f(x) = 0$ når $\sqrt{x} = 0$ eller når $x^2 - 4x + 3 = 0$.
$\sqrt{x} = 0$ når $x = 0$, så $x = 0$ er et nullpunkt.
$x^2 - 4x + 3 = 0$ når $x = 3$ og når $x = 1$.
Vi fant alle nullpunktene innenfor definisjonsområdet, så 0, 1 og 3 er nullpunktene til f.

Når vi skal derivere f er det lurt å bruke den bakerste formuleringen. Da får vi

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cdot 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 3x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \neg g x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\sqrt{x}f'(x) = x^{\frac{1}{2}}f'(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 12x + 3).$$

Siden $\sqrt{x} \geq 0$ for $0 \leq x \leq 3$, vil $f'(x) \geq 0$ når $\sqrt{x}f'(x) \geq 0$.
Vi bestemmer nullpunktene til $5x^2 - 12x + 3$ til $\frac{6 \pm \sqrt{21}}{5}$
Det gir

$$\sqrt{x}f'(x) = 5(x - \frac{6 + \sqrt{21}}{5})(x - \frac{6 - \sqrt{21}}{5}).$$

Faktorisering og bruk av fortegnsskjema gir at f er voksende for

$$0 \geq x \geq \frac{6 - \sqrt{21}}{5}$$

og for

$$\frac{6 + \sqrt{21}}{5} \geq x \geq 3,$$

mens f er avtagende mellom nullpunktene til f'.

b) Ved å observere at $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 4x + 3)$ og at $x^2 - 4x + 3$ er ≥ 0 i intervallet $[0, 1]$, ser vi at arealet er bestemt av

$$\int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} dx = \Big|_0^1 \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{7} - \frac{8}{5} + 2 = \frac{24}{35}$$

Oppgave 2

$V'(t)$ vil gi oss netto tilstrømning, det vil si tilstrømning minus utslipp. Siden tilstrømningen er konstant, vil utslippet være maksimalt når netto tilstrømning er på sitt laveste, det vil si når $V'(t)$ tar sin minimumsverdi.

$$V'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 10t - 40$$

$$V''(t) = t - 10$$

$V''(t) = 0$ for $t = 10$.
Siden $V''(t) < 0$ når $t < 10$ og $V''(t) > 0$ for $t > 10$, vil $t = 10$ være et minimumspunkt for $V'(t)$. Vi får altså maksimal utstrømning for $t = 10$, dvs. etter 10 sekunder.

Netto tilstrømning på det tidspunktet er

$$V'(10) = \frac{1}{2}(10)^2 - 10 \cdot 10 - 40 = 50 - 100 - 40 = -90.$$

Måleenheten her er l/sec. Det betyr at netto utslipp er

$$90\ l/sec,$$

og siden det fortastt renner 10 l/sec inn i tanken, må det i tidspunktet $t = 10$ sec renne 100 l/sec ut av tanken.

Oppgave 3

a) Egenverdiene til M er som kjent bestemt av løsningene til en annengradslikning, så det finnes høyst to av dem.
Det er derfor nok å sette inn 1 og 0,63 for λ i

$$det \begin{bmatrix} 0,9 - \lambda & 0,27 \\ 0,1 & 0,73 - \lambda \end{bmatrix}.$$

For $\lambda = 1$ får vi

$$det \begin{bmatrix} -0,1 & 0,27 \\ 0,1 & -0,27 \end{bmatrix} = 0,027 - 0,027 = 0.$$

For $\lambda = 0,63$ får vi

$$det \begin{bmatrix} 0,27 & 0,27 \\ 0,1 & 0.1 \end{bmatrix} = 0,027 - 0,027 = 0.$$

Dette må da være de to egenverdiene.

Egenvektorene $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for $\lambda = 1$ er bestemt av likningen

$$-0,1x + 0,27y = 0,$$

som gir at alle vektorer på formen

$$a \begin{bmatrix} 2,7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer med egenverdier 1.
For $\lambda = 0.63$ finner vi egenvektorene ved å løse likningen

$$0,27x + 0,27y = 0,$$

som har $y = -x$ som en generell løsning. Det betyr at disse egenvektorene er alle vektorer på formen

$$b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Første kolonne angir hvor mange som kjører piggfitt hhv. med pigger i år $n + 1$ pr. bilist som kjører piggfritt i år N. Siden både 90% av de piggfrie bilistene som fortsatt kjører og av de nye bilistene som erstatter de som slutter med bilkjøring, kjører piggfritt året etter, vil fordelingen være $0,9$ til $0,1$, det vil si som i første kolonne.
Andre kolonne skal angi hvor mange som kjører med pigger i år $n + 1$ pr. bilist som kjører med pigger i år n.
Her må vi se på to grupper.

90% fortsetter å kjøre, og av de kjører 80% med pigger og 20% uten. Det gir et bidrag på 72% med pigger og 18% uten,
10% erstattes av nye bilister, og av de kjører 10% med pigger og 90% uten. Det gir et bidrag på 1% med pigger og 9% uten.
Legger vi sammen disse prosentene og deler på 100 får vi at det vil kjøre 0,27 bilist uten pigger i år $n + 1$ pr bilist med pigger i år n, mens det tilsvarende tallet for piggbrukere er 0,73.

c) I år 0 , her 1990, kjørte 100% av bilistene med pigger. Det svarer til vektoren

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Skriver vi denne vektoren som en sum av egenvektorer, får vi likningen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2,7 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som egentlig er to likninger i de to ukjente a og b.
Løæser vi disse får vi $a = \frac{100}{3,7}$ og $b = (\frac{100}{3,7} - 100)$.

Da er

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{100}{3,7} \begin{bmatrix} 2,7 \\ 1 \end{bmatrix} + (0,63)^n (\frac{100}{3,7} - 100) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Spesielt er

$$x_n = \frac{270}{3,7}(1 - (0,63)^n).$$

Vi må løse ulikheten

$$\frac{270}{3,7}(1 - (0,63)^n) > 70$$

eller på ordnet form

$$(0,63)^n < 1 - \frac{3,7 \cdot 70}{270}.$$

Nå er tiden moden for å ta kalkulatoren til hjelp.
Vi finner at 7 er det minste hele tallet slik at

$$7 > \frac{\ln(1 - \frac{3,7 \cdot 70}{270})}{\ln 0,63},$$

så etter 7 år kjører minst 70% av bilistene piggfritt.

Oppgave 4

Denne oppgaven henter sitt tema fra et kapittel i boka som ikke lenger er pensum, og jeg gir ikke noe løsningsforslag på denne.