Lineær algebra

Kurskompendium, Utøya, MAT1000

Inger Christin Borge

2006

Forord

Dette er et kompendium skrevet til bruk i MAT1000-varianten av Utøya-seminarene, arrangert av Matematisk fagutvalg ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Temaet er **lineær algebra** (som er temaet i kapittel 10 i Tor Gulliksens "Matematikk i praksis").

Tusen takk til Olav Skutlaberg for kommentarer.

Denne versjonen er rettet for trykkfeil o.l. etter Utøya-seminaret 23.-24. september.

Blindern, september 2006
Inger Christin Borge

Innhold

Notasjon **iv**

1 Lineære likningssystemer **1**
1.1 Lineære likninger 1
1.2 Løsningsmengde og parameterfremstilling 3
1.3 Flere likninger 5
1.4 Grunnleggende løsningsmetoder 6
1.5 Geometriske løsninger 10
1.6 Et viktig resultat 13

2 Matriser **15**
2.1 Definisjoner og regneoperasjoner 15
2.2 Regneregler og noen spesielle matriser 20
2.3 Determinanten til en matrise 21
2.4 Likninger 23

3 Lineære likningssystemer og matriser **25**
3.1 Den utvidede matrisen til et likningssystem 25
3.2 Radoperasjoner 26
3.3 Redusert trappeform 29
3.4 Gauss-Jordan eliminasjon 31
3.5 Et nyttig resultat... 33
3.6 Konklusjon 34

A Oppgaver **35**

B Fasit **42**

Notasjon

$\{\}$	mengde
$\in$	element i
$\mathbb{N}$	de naturlige tallene 1,2,3,...
$\mathbb{Z}$	de hele tallene $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	de rasjonale tallene (brøker)
$\mathbb{R}$	de reelle tallene (tallinjen)
	med ordet 'tall' menes et reelt tall
$\mathbb{R}^2$	det reelle planet
$\mathbb{R}^3$	det reelle rommet
$\square$	avslutter et *Bevis*
$\blacksquare$	avslutter et **Eksempel** eller en **Bemerkning**

Kapittel 1

Lineære likningssystemer

"Jeg tenker på et tall slik at π ganger tallet er 12."

1.1 Lineære likninger

Matematikk dreier seg om å løse problemer. Problemene gjøres ofte om til likninger som så må løses. I lineær algebra studerer vi spesielt systemer av *lineære* likninger og deres løsninger.

For eksempel kan problemet med å finne et tall slik at π ganger tallet er 12 gjøres om til en likning ved å kalle tallet vi vil finne for x. Problemet blir nå å finne x der x oppfyller likningen $\pi x = 12$. I likningsspråket kalles x en *variabel* (den ukjente i problemet vi vil løse).

Vi får fort likninger med flere variable, eller problemer med flere ukjente om man vil: For eksempel kan jeg tenke på fire tall slik at summen av dem er 12. Hvis vi kaller de ukjente tallene for x_1, x_2, x_3 og x_4, blir problemet vårt gjort om til likningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$. Begge likningene vi har sett til nå er eksempler på lineære likninger.

Definisjon 1.1 *La $n \in \mathbb{N}$. En (reell) lineær likning i n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en likning på formen*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og b er (reelle) konstanter. Tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kalles koeffisientene til likningen.

Matematikk er den mest eksakte vitenskapen vi har. Og uten definisjonene klarer vi oss ikke lenge. De sier nemlig nøyaktig hva vi mener med de ulike begrepene vi jobber med.

For at vi skal kalle en likning lineær, kan vi altså kun ha ledd der vi ganger variablene med konstanter (også kalt *skalarer*) og i tillegg har vi lov til å ta summer av slike ledd. Lineære likninger inneholder dermed ikke produkter eller røtter av variablene, og variablene er heller ikke argumenter for for eksempel trigonometriske, logaritmiske eller eksponentiale funksjoner.

Dette vil videre si at problemer der for eksempel ordet 'produkt' dukker opp, slik som "Finn to tall slik at produktet er 5" ikke vil gi opphav til lineære likninger. Areal- og volum-problemer er andre eksempler som involverer produkter av de ukjente.

Eksempel 1.2 Likningen

$$\sqrt{5}x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

er en lineær likning i x_1, x_2 og x_3 fordi den er på formen $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$ der a_1, a_2, a_3 og b er reelle konstanter ($a_1 = \sqrt{5}, a_2 = 1, a_3 = -3$ og $b = 0$).

Likningen

$$4x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4^3 = x_1$$

er ikke lineær, siden vi har leddet x_4^3 som ikke er på formen a_4x_4 for en reell konstant a_4. ■

Det er altså problemer der vi kan bruke ordene 'sum' og 'multiplikasjon med konstanter' (kalt skalering) som gir oss lineære likninger. Slike problemer er det mange av.

1.2 Løsningsmengde og parameterfremstilling

Hvordan løser vi lineære likninger? Hvordan finner vi x i likningen $\pi x = 12$? Vi leter kanskje ikke i sandkassa, men heller i tallverdenen. Da finner vi at $x = \frac{12}{\pi}$ passer inn i likningen. Og det finnes ingen andre tall som oppfyller likningen. Altså var det tallet $\frac{12}{\pi}$ jeg tenkte på i starten av kapittelet. Dette er forøvrig diameteren i en sirkel med omkrets 12.

Hva med løsningen av likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12? \tag{1.1}$$

La oss først definerer hva vi mener med en løsning av en lineær likning:

Definisjon 1.3 *En løsning av en lineær likning* $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = b$ *er en følge av* n *tall* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *slik at likningen er oppfylt når vi setter* $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots$, $x_n = s_n$. *Mengden av alle løsninger kalles løsningsmengden, eller den generelle løsningen, til likningen.*

Bemerkning 1.4 *I ordet 'følge' ligger det en ordning, dvs. en følge av* n *tall er et ordnet* n*-tuppel av tall der ordningen er gitt ved indekseringen (*s_1 *er det første tallet i følgen,* s_2 *er det andre tallet osv.).*

For likningen $\pi x = 12$ består altså løsningsmengden av én følge: $x = \{\frac{12}{\pi}\}$ siden likningen er oppfylt når vi setter $x = \frac{12}{\pi}$ og det er den eneste løsningen.

Hva med de fire tallene hvorav summen er 12, dvs. likning (1.1)? Jeg tror ikke dere vet hvilke tall jeg tenker på. For eksempel er følgen $(1, 1, 1, 9)$ en løsning, siden likningen er oppfylt når vi setter $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ og $x_4 = 9$. Videre har vi også løsninger $(-5, 5, 11, 1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 7, 3)$ osv. Vi kan faktisk fortsette i det uendelige med å finne løsninger. Hvordan kan vi presentere mengden av alle disse løsningene?

La oss bestemme oss for at tallet x_1 er s_1. Vi tenker på s_1 som et symbol som kan anta alle verdier i $\mathbb{R}$. Dette symbolet kalles en *parameter*. På denne måten kvitter vi oss med variabelen x_1 og har redusert likningen (1.1) til

$$x_2 + x_3 + x_4 = 12 - s_1,$$

dvs. vi leter nå etter tre tall slik at summen av dem er $12 - s_1$. Hvis for eksempel $s_1 = 3$, så er $(1, 1, 7)$, $(3, 3, 3)$ og $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 3)$ eksempler på løsninger. Vi vet fortsatt ikke hvordan vi kan holde orden på alle disse løsningene. For det første skal vi jo finne x_2, x_3 og x_4. I tillegg kan vi velge hvilken verdi vi vil for s_1.

Vi innfører en parameter for x_2 også, så kvitter vi oss iallefall med en variabel til. La parameteren s_2 erstatte x_2. Da har vi redusert likning (1.1) videre til

$$x_3 + x_4 = 12 - s_1 - s_2.$$

Fortsatt har vi samme problem som ovenfor: vi kan velge hvilke verdier vi vil for s_1 og s_2, og vi har fortsatt to variable igjen i likningen. Siden vi har *to* variable igjen, er det ikke usannsynlig at det hjelper å kvitte seg med enda en av dem. Så vi gir oss ikke, og innfører parameteren s_3 for x_3. Dermed er likningen (1.1) redusert til

$$x_4 = 12 - s_1 - s_2 - s_3.$$

Vi kan fortsatt velge hvilke verdier vi vil for de tre parameterne, men når vi har gjort det, vet vi også hva x_4 er, dvs. vi har ikke noen ukjente igjen, men bare parametere.

Vi er dermed klare til å presentere løsningsmengden til likningen (1.1):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(s_1, s_2, s_3, 12 - s_1 - s_2 - s_3) | s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Vi får altså alle løsninger av (1.1) ved å velge hvilke verdier vi vil for s_1, s_2 og s_3. Dette gir uendelig mange løsninger. For eksempel kan vi velge $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 1$, som gir følgen $(1, 1, 1, 9)$. Generelt ser vi at alle følger $(s_1, s_2, s_3, 12 - s_1 - s_2 - s_3)$ passer inn i likningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ siden $s_1 + s_2 + s_3 + (12 - s_1 - s_2 - s_3) = 12$.

Den (meget ryddige) måten i (1.2) å presentere løsningsmengden til en likning på kalles en *parameterfremstilling* av løsningsmengden. (Vi kan tenke på en parameter som en variabel som har fått en spesiell rolle.)

Eksempel 1.5 For å finne løsningsmengden til likningen

$$5x_1 + 3x_2 = 15,$$

løser vi ut for en av variablene, og erstatter denne med en parameter (vi har en likning med to ukjente, og har ikke nok informasjon til å finne bare en løsning):

$$x_1 = 3 - \frac{3}{5}x_2$$

Dermed blir løsningsmengden

$$(x_1, x_2) = \{(3 - \frac{3}{5}s_2, s_2) | s_2 \in \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

■

1.3 Flere likninger

Akkurat som vi kan ha mange ukjente størrelser i problemet vårt, kan vi også ha flere opplysninger som gir oss ulike sammenhenger mellom de ukjente størrelsene. For eksempel kan vi ha fire tall slik at summen er 12, og i tillegg får vi vite at det ene tallet er dobbelt så stort som summen av de andre tre tallene. Dette kan vi gjøre om til likningene

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_1: & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ L_2: & x_1 = 2(x_2 + x_3 + x_4) \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

Jo flere ekstra opplysninger vi skaffer oss, jo flere likninger skal variablene oppfylle. Vi får dermed det vi kaller et likningssystem:

Definisjon 1.6 *En endelig mengde av lineære likninger i variablene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kalles et lineært likningssystem.*

En løsning av et lineært likningssystem er en følge av n tall $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ slik at alle likningene i systemet er oppfylt når vi setter $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. Mengden av alle løsninger kalles løsningsmengden, eller den generelle løsningen, til likningssystemet.

I (1.4) har vi brukt {} rundt likningssystemet (siden det er en mengde), men disse parentesene droppes ofte.

Likningssystemene kan fort bli ganske kompliserte, når vi har mange ukjente som avhenger av hverandre på ulike måter. Hvis vi tenker stort, så kan vi jo ta verdensøkonomien... Da kan man sette opp kompliserte (men ofte lineære) avhengighetsforhold mellom sektorer som jordbruk, fiskeindustri, oljeindustri osv.

1.4 Grunnleggende løsningsmetoder

La oss se hvilken forskjell den ekstra opplysningen (likning L_2) gir i forhold til løsningen av likning (1.1). Vi skal altså løse likningssystemet (1.4). Da har vi iallefall et par metoder å velge mellom og vi minner om *addisjonsmetoden* og *substitusjonsmetoden* siden tankegangen her blir viktig videre:

Addisjonsmetoden (også kalt eliminasjonsmetoden) Her eliminerer vi en eller flere av variablene i likningssystemet ved å multiplisere en av likningene i systemet med en passende konstant og legge dette multiplumet til en eller flere av de andre likningene (vi adderer likninger).

La oss se på systemet (1.4):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ L_2: &\quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

Vi kan nå velge hvilken variabel vi vil prøve og eliminere først, så det er her det gjelder å få seg et overblikk over systemet som skal løses, og å være lur. Hvis vi legger $2 \cdot L_1$ til L_2, får vi

$$3x_1 = 24.$$

Dermed har vi eliminert tre av variablene, og sitter igjen med én likning i én variabel. Løsningen av denne likningen er $x_1 = 8$. Altså har vi funnet at tallet som er dobbelt så stort som summen av de tre andre tallene må være 8 ($\frac{2}{3}$ av 12).

Hva med de tre andre tallene? Vi har funnet at x_1 må være 8, så likningssystemet er nå redusert til

$$\begin{aligned} L_1\colon &\quad x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ L_2\colon &\quad -2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8 \end{aligned}$$

La oss fortsette med addisjonsmetoden. Hvis vi legger $2 \cdot L_1$ til L_2, får vi utsagnet

$$0 = 0,$$

noe som utvilsomt er riktig. Vi sier at likningssystemet er *konsistent*, dvs. at 'det gir mening'. (Hadde det for eksempel stått 5 isteden for 4 i L_1, hadde vi fått utsagnet '$0 = 2$', noe som ikke stemmer. Et slikt system kalles *inkonsistent*, dvs. systemet gir ikke mening, og har derfor ingen løsning. Det betyr også at hvis vi innfører en tilleggsoplysning som sier at 'summen av de andre tre tallene er 5', så har vi ingen løsning på problemet.)

Javel, det er jo flott at systemet er konsistent, for da har det løsninger. Hva er så løsningene? Utsagnet '$0 = 0$' forteller oss videre er at vi i realiteten kun har én likning, siden begge likningene sier det samme, dvs. vi trenger ikke den ekstra opplysningen L_2 gir oss, for den gir oss akkurat samme informasjon som likning L_1. Dermed heter likningssystemet vårt

$$L_1\colon \quad x_2 + x_3 + x_4 = 4 \ ,$$

dvs. vi har tre tall slik at summen er 4. Da har vi redusert oss til et problem av samme type som likning (1.1), og på samme måte må vi nå innføre parametere for to av variablene. Dermed blir løsningen av likningssystemet (1.4)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(8, s_2, s_3, 4 - s_2 - s_3) | s_2, s_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Vi har altså fortsatt uendelig mange løsninger, siden vi kan velge hvilke verdier vi vil for både s_2 og s_3 (vi kunne godt ha kalt parameterne for s_1 og s_2 –eller noe annet–, men det er oversiktlig å følge indekseringen

i variablene). Men den ekstra opplysningen vi fikk (likning L_2) har gjort at vi ikke har så stor frihet når det gjelder å finne løsninger. For eksempel er $(1, 1, 1, 9)$ ikke lenger en løsning, mens $(8, 2, 1, 1)$ er en løsning (ved å velge $s_2 = 2$ og $s_3 = 1$).

Substitusjonsmetoden Når vi bruker denne metoden løser vi ut for en av variablene i en av likningene og bytter ut (substituerer) denne variabelen med uttrykket vi får i alle de andre likningene.

La oss se på systemet (1.4) igjen:

$$\begin{aligned} L_1\colon &\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ L_2\colon &\quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

Igjen kan vi velge hvilken variable vi ønsker å bytte ut. Det er forøvrig gjerne her det matematiske talentet kommer inn (så lenge vi har en oppskrift går ting greit, men når vi skal ta valg er det noen valg som er bedre enn andre, da de ofte er tidsbesparende og/eller elegante).

Vi velger å bruke L_2, som gir $x_1 = 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$. Vi bruker dette til å bytte ut x_1 i L_1, og får likningen $3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12$, som er det samme som likningen $x_2 + x_3 + x_4 = 4$. Vi kan videre sette inn 4 for $x_2 + x_3 + x_4$ i L_1, og får at $x_1 = 8$. Dermed har vi redusert likningssystemet til akkurat de samme likningene som ved å bruke addisjonsmetoden, og vi får samme svar.

Vi ser at så lenge vi ikke har nok informasjon til å bestemme en nøyaktig løsning på problemet vårt, dvs. vi har flere variable enn vi har likninger, må vi innføre parametere for å presentere løsningsmengden til problemet.

Bemerkning 1.7 Det fins uendelig mange parameterfremstillinger for én og samme mengde. Hvis vi har redusert systemet vårt til en likning med n ukjente, må vi innføre $n - 1$ parametere. Disse kan vi velge hvilke som helst verdier for, og når vi har gjort det, er verdien til den siste variabelen kjent. (Slik vi har sett i eksemplene ovenfor). Hvilke av de $n - 1$ variablene som skal erstattes med en parameter, kan vi velge. Dessuten kan vi manipulere

med parameterne alt etter hvordan vi ønsker at løsningene skal se ut (lovlige manipuleringer er å multiplisere med konstanter og summere parametere). ■

Eksempel 1.8 I Eksempel 1.5 kunne vi godt ha løst ut for x_2 isteden. Da får vi

$$x_2 = 5 - \frac{5}{3}x_1.$$

En naturlig parameterfremstilling av løsningsmengden blir

$$(x_1, x_2) = \{(s_1, 5 - \frac{5}{3}s_1) | s_1 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.5}$$

Parameterfremstillingene (1.3) og (1.5) er eksempler på to fremstillinger av *samme mengde*. Vi vet at en mengde av følger av to tall gir oss punkter i det reelle planet $\mathbb{R}^2$. I (x_1, x_2)-planet får vi en linje (uendelig mange punkter) med stigningstall $-\frac{5}{3}$ og skjæringspunkt med x_2-aksen i punktet $(0, 5)$. I (x_2, x_1)-planet, får vi en linje med stigningstall $-\frac{3}{5}$ og skjæringspunkt med x_1-aksen i punktet $(0, 3)$. ■

La oss ta et eksempel der vi til slutt får én løsning:

Eksempel 1.9 Märtha er to år eldre enn Haakon. Hvor gamle er de?
Løsning: Nå har vi to ukjente, så la x_1 være alderen til Märtha og x_2 være alderen til Haakon. Problemet gjøres dermed om til likningen $x_1 = x_2 + 2$, som har mange løsninger. En parameterfremstilling for løsningsmengden kan være

$$(x_1, x_2) = \{(s_1, s_1 - 2) | s_1 \in \mathbb{R}\},$$

dvs. vi innfører en parameter for alderen til Märtha, og når vi vet hennes alder, vet vi også Haakon sin alder (Alderen til Märtha minus to). For eksempel kan de være 7 og 5 år eller 22 og 20 år. Hvis jeg i tillegg sier at Märtha og Haakon er 68 år til sammen (en opplysning som forandres fra år til år), så vet vi faktisk nøyaktig hvor gamle de er: 34 er halvparten av 68, så de må være 35 og 33 år. I likningsspråket: vi har fått en likning til, nemlig $x_1 + x_2 = 68$,

og dermed har vi likningssystemet

$$\begin{aligned} L_1\colon &\quad x_1 + x_2 = 68 \\ L_2\colon &\quad x_1 - x_2 = 2 \end{aligned}$$

Addisjonsmetoden med $L_1 + L_2$ gir $2x_1 = 70$, dvs. $x_1 = 35$, og dermed $x_2 = 33$. ■

Vi skal snart se hvordan vi kan løse større likningssystemer ved å sette addisjonsmetoden inn i et større maskineri.

Bemerkning 1.10 *Merk at vi har brukt $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ som navn på variablene våre, men så lenge vi kun har systemer med opptil tre variable kaller vi de ofte x, y og z.*

1.5 Geometriske løsninger

Ovenfor har vi sett hvordan vi kan løse lineære likningssystemer algebraisk. En løsning er en (ordnet) følge av n tall, der n er antall variable i systemet. Vi vet at en følge av et tall kan tolkes som et punkt på tallinjen, en følge av to tall som et punkt i planet, og en følge av tre tall gir oss et punkt i rommet. På denne måten kan systemene også løses geometrisk. Vi skal ikke fokusere så mye på geometrien, men det kan være nyttig å kunne se for seg hva som skjer algebraisk. Dermed er resten av dette kapittelet med mest som en ekstra hjelp.

Bemerkning 1.11 *Vår geometriske visualiseringsevne stopper etter tre dimensjoner (rommet). Vi kan derfor kun forestille oss løsningsmengden til systemer med tre variable.*

Hver likning i et likningssystem representerer en lineær figur i (det reelle) rommet. Lineære figurer er punkter, linjer og plan. (Tegn gjerne tegninger mens du leser videre!)

- Én likning med én variabel (f.eks. $\pi x = 12$) har geometrisk løsningsmengde et *punkt* på talllinjen $\mathbb{R}$ (dvs. én løsning).

- Én likning med to variable (f.eks. $5x + 3y = 15$) har geometrisk løsningsmengde en *linje* i planet $\mathbb{R}^2$ (dvs. uendelig mange løsninger).
- Én likning med tre variable (f.eks. $4x + 2y + z = 10$) har geometrisk løsningsmengde et *plan* i rommet $\mathbb{R}^3$ (dvs. uendelig mange løsninger). Den generelle likningen for et plan er

  $$ax + by + cz = d$$

  der a, b, c og d er reelle tall, akkurat som den generelle likningen for en linje er $ax + by = c$ der a, b og c er reelle tall.
- Og hvis du lurer: Én likning med n variable der $n \geq 4$ (f.eks. $3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 - x_5 = 1$) gir oss et $(n-1)$-dimensjonalt plan (vi trenger $n - 1$ parametere) i det n-dimensjonale rommet $\mathbb{R}^n$. Men det kan vi altså ikke forestille oss. Imidlertid får vi fortsatt uendelig mange løsninger.

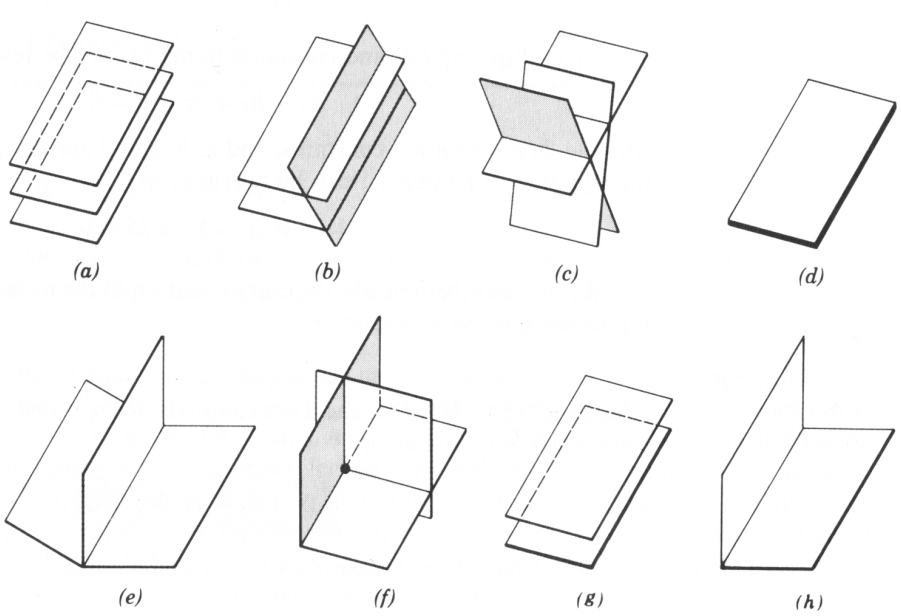
Når vi skal oppfylle flere likninger på en gang, betyr det geometrisk å finne alle skjæringspunktene mellom de lineære figurene likningene representerer.

- To likninger med to variable: Geometrisk løsningsmengde er skjæringspunktene mellom to linjer. Da kan ett av følgende tre fenomener finne sted:
  - linjene er parallelle (ingen løsning)
  - linjene skjærer hverandre i ett punkt (én løsning)
  - linjene faller sammen (uendelig mange løsninger)
- Tre likninger med to variable: Geometrisk løsningsmengde er skjæringspunktene mellom tre linjer. Se Oppgave 3.
- Fire likninger med to variable, fem likninger med to variable, osv. (utforsk!)
- To likninger med tre variable: Geometrisk løsningsmengde er skjæringspunktene mellom to plan. Nå kan ett av følgende fenomener skje:

- planene er parallelle (ingen løsning)
- planene skjærer hverandre i en linje (uendelig mange løsninger)
- planene faller sammen (uendelig mange løsninger)

Vi ser også geometrisk at når vi har flere variable enn vi har likninger, kan vi ikke få kun én løsning! To plan kan ikke skjære hverandre i bare ett punkt.

- Tre likninger med tre variable: Geometrisk løsningsmengde er skjæringspunktene mellom tre plan i rommet:



(Illustrasjon hentet fra "Elementary linear algebra", H. Anton, Wiley 1991)

a) Tre parallelle plan. Ingen løsning (ingen felles punkter).
b) To parallelle plan og et skjærende tredje plan.
Ingen løsning (ingen felles punkter).
c) Tre plan uten felles skjæringspunkter.
Ingen løsning (ingen felles punkter).
d) Tre sammenfallende plan.
Uendelig mange løsninger (et felles plan).
e) Tre plan som skjærer i en felles rett linje.
Uendelig mange løsninger (en felles rett linje).
f) Tre plan som skjærer i ett punkt.
Én løsning (ett felles punkt).
g) Et plan parallelt med to sammenfallende plan.
Ingen løsning (ingen felles punkter).
h) To sammenfallende plan og et skjærende tredje plan.
Uendelig mange løsninger (en felles rett linje).

- Dere må gjerne utforske fire likninger med tre variable, fem likninger med tre variable osv.!

1.6 Et viktig resultat

Vi kan oppsummere observasjonene våre i et viktig resultat:

Teorem 1.12 *Et lineært likningssystem har enten ingen, én eller uendelig mange løsninger.*

Bevis: [*skisse*] Et lineært likningssystem kan ha enten ingen, én eller flere enn én løsning. Vi må vise at hvis vi har mer enn én løsning, så får vi uendelig mange løsninger (og ikke bare to eller tre).

Vi har et system av lineære likninger, og geometrisk ser vi at lineære figurer alltid vil skjære hverandre ingen, én eller uendelig mange ganger –siden de ikke har noen krumning. (Hvis for eksempel to linjer skjærer hverandre i to punkter, må de falle sammen i alle punkter.)

Algebraisk blir beviset mest elegant når vi har innført matriser, for da får vi en ryddig måte å holde orden på alle likningene og variablene. □

Kapittel 2

Matriser

I dette kapittelet skal vi studerer noen nye matematiske objekter kalt matriser. Disse kan blant annet brukes for å løse lineære likningssystemer.

2.1 Definisjoner og regneoperasjoner

Definisjon 2.1 *En matrise av tall er en rektangulær tabell av tall. Tallene som forekommer i matrisen kalles komponentene til matrisen. Vi bruker ofte firkant-parenteser rundt en matrise, som gjerne betegnes med stor bokstav.*

Eksempel 2.2 Matrisen A gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

har komponenter $7, 1, 3, 4, 2$ og 1. ■

Vi skal nå lære å regne med matriser. Da legger vi først merke til at matriser kan variere i størrelse. Størrelsen til en matrise angis ved å si hvor mange rader (horisontale linjer) og hvor mange kolonner (vertikale linjer) matrisen har. Vi skriver størrelsen som

$$\text{(antall rader)} \times \text{(antall kolonner)}.$$

Matrisen A i Eksempel 2.2 er en 2×3-matrise.

Bemerkning 2.3 *Gulliksen bruker 'linjer' og 'søyler' for rader og kolonner.*

Posisjonen til en komponent kan dermed angis ved å si hvilken rad og hvilken kolonne den står i (alltid rad først). I Eksempel 2.2 har tallet 2 posisjon (2,2) og tallet 4 har posisjon (2,1).

Generelt kan vi skrive en $m \times n$-matrise (subscriptene gir posisjon):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

To matriser er *like* hvis de har samme størrelse og hvis de er komponentvis like (alle komponentene må være like og stå på samme plass i de to matrisene).

Definisjon 2.4 ***(Addisjon av matriser)*** *La A og B være to matriser av samme størrelse. Vi definerer summen $A + B$ til å være matrisen vi får ved å addere komponentvis, dvs.*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriser av ulik størrelse kan ikke adderes.

Definisjon 2.5 ***(Multiplikasjon med et tall)*** *La A være en matrise og c et reelt tall. Produktet cA er matrisen vi får ved å multiplisere hver av komponentene i A med c.*

Subtraksjon av matriser defineres dermed tilsvarende som for addisjon; vi subtraherer komponentvis, så lenge matrisene har lik størrelse.

Eksempel 2.6

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 4 & 12 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 11 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} 4 & 12 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 11 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 3 & 12 & 30 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} 4-6 & 12-18 & 3-3 \\ 1-3 & 0-12 & 7-30 \\ 2-3 & 11-3 & 0-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -2 & -12 & -23 \\ -1 & 8 & -9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Det neste blir nå å definere multiplikasjon av matriser. Definisjonen kan nok virke noe merkelig ved første øyekast, men den er meget hensiktsmessig (som alt annet i matematikken). La oss først se på et eksempel:

Eksempel 2.7 Det er mange mobilabonnementer å velge mellom idag. Tabell 1 nedenfor viser prisene på to av Telenors abonnementer (pr. 2. januar 2006). I tabell 2 har jeg fylt inn noen tall (basert på ca. gjennomsnittsbruk av mobiltelefon i 6 måneder for ungdom i Norge??)
Tabellene kan oppfattes som matriser, og vi ser at jeg har laget dem slik at kolonnene i tabell 1 hører naturlig til radene i tabell 2.

Tabell 1	Måneds-pris	Minutt-pris til mobil	Minutt-pris til fasttelefon	Pris per SMS	Pris per MMS
djuice nonstop	299,00	1,39	1,99	0,00 [1]	0,00 [1]
djuice kontant ladet i minibank/ med ladekort	0,00	1,99	3,99	0,69	1,99

Tabell 2	Erik	Amandip	Steffen	Dag
Antall måneder	6	6	6	6
Antall minutter til mobil	2673	1876	2457	2324
Antall minutter til fasttelefon	455	504	341	876
Antall SMS	1042	1361	1402	1236
Antall MMS	0	0	35	5

Tabell 1 gir opphav til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 299,00 & 1,39 & 2,99 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,99 & 3,99 & 0,69 & 1,99 \end{bmatrix}$$

og tabell 2 gir opphav til matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2673 & 1876 & 2457 & 2324 \\ 455 & 504 & 341 & 876 \\ 1042 & 1361 & 1402 & 1236 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi nå ønsker en tabell over hvor mye Erik, Amandip, Steffen og Dag må betale for hvert av de to abonnementene i 6 måneder, gitt bruken i tabell 2, slår vi sammen de to tabellene. For eksempel for Erik og djuice nonstop: $299,00 \cdot 6 + 1,39 \cdot 2673 + 2,99 \cdot 455 + 0,00 \cdot 1042 + 0,00 \cdot 0 = 6870$. Dette blir tabellen (avrundet til hele kroner):

Tabell 3	Erik	Amandip	Steffen	Dag
djuice nonstop	6870	5909	6229	7644
djuice kontant ladet i minibank/ med ladekort	7854	6683	7287	8983

Tabell 3 gir opphav til matrisen som vil være produktet AB! ■

Definisjon 2.8 *(**Multiplikasjon av matriser**) La A være en $m \times r$-matrise og B en $s \times n$-matrise. Produktet AB er kun definert når $r = s$, dvs. når A har like mange kolonner som B har rader. Når $r = s$ definerer vi produktet AB til å være følgende matrise:*

Størrelse *AB blir en $m \times n$ matrise (den får altså like mange rader som A og like mange kolonner som B)*

Komponenter *for å finne komponenten i rad i og kolonne j til matrisen AB, multipliserer vi komponentene i rad i fra A og kolonne j fra B komponentvis og adderer disse produktene, dvs. vi tar prikkproduktet av rad i i A og kolonne j i B.*

Puhh... Det hele blir mye klarere med et eksempel (og se gjerne på Eksempel 2.7 en gang til):

Eksempel 2.9

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 4\cdot 12 + 7\cdot 9 & 2\cdot 8 + 4\cdot 5 + 7\cdot 14 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 12 + 6\cdot 9 & 1\cdot 8 + 0\cdot 5 + 6\cdot 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 48 + 63 & 16 + 20 + 98 \\ 3 + 0 + 54 & 8 + 0 + 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 & 134 \\ 57 & 92 \end{bmatrix}$$

Vi ser at produktet av en 2×3-matrise og en 3×2-matrise blir en 2×2-matrise. ■

På forelesning vil dere få en alternativ metode/huskeregel for å multiplisere matriser.

2.2 Regneregler og noen spesielle matriser

Noen spesielle matriser som har egne navn:

Nullmatrise er en matrise der alle komponentene er 0 (den kan variere i størrelse, men alle nullmatriser skrives med 0).

Kvadratisk matrise er en matrise der antall rader er lik antall kolonner.

Diagonal matrise er en kvadratisk matrise der alle komponentene utenfor diagonalen (fra venstre øvre hjørne ned til høyre nedre hjørne) er null.

Identitetsmatrise er en diagonal matrise der alle komponentene på diagonalen er 1. Vi skriver I_n for identitetsmatrisen med n rader (og dermed n kolonner) eller bare I når størrelsen er underforstått.

Øvre triangulær matrise er en kvadratisk matrise der alle komponentene under diagonalen er null.

Nedre triangulær matrise er en kvadratisk matrise der alle komponentene over diagonalen er null.

Vi skal nå skrive opp endel regneregler for matriser. De er nesten de samme som for reelle tall, men med et meget viktig unntak: multiplikasjon av matriser er *ikke* en kommutativ operasjon, dvs. AB er nesten aldri lik BA. Vi legger også merke til at nullmatrisen vil spille rollen til tallet 0, og identitetsmatrisen vil spille rollen til tallet 1.

Teorem 2.10 *(**Regneregler**) Anta at størrelsen på matrisene er slik at operasjonene som forekommer nedenfor er definert, og la små bokstaver står for reelle tall. Da er følgende regler oppfylt:*

- $A + B = B + A$ *(addisjon er kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(addisjon er assosiativ)*
- $A + 0 = 0 + A = A$ *(nullmatrisen er nullelementet)*
- $A - A = 0$ *(additiv invers)*

- $A(BC) = (AB)C$ *(multiplikasjon er assosiativ)*
- $AI = IA = A$ *(identitetsmatrisen er identitetselementet)*
- $A(B + C)) = AB + BC$ *(multiplikasjon distribuerer over addisjon)*
- $(B + C)A = BA + CA$
- $a(B + C) = aB + aC$
- $(a + b)C = aC + bC$
- $a(bC) = (ab)C$
- $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

□

2.3 Determinanten til en matrise

Determinanten til en matrise er et tall som kan regnes ut fra matrisen. Vi skal få god bruk for determinanten litt senere (og senere i MAT1000), så la oss først se hvordan vi kan regne ut dette tallet.

For det første: for å kunne regne ut determinanten til en matrise, må matrisen være kvadratisk, så vi starter med en 1×1-matrise. Dette er bare et tall og determinanten til et tall ønsker vi at bare skal være tallet selv. Vi får altså ikke noe nytt.

Hva når matrisen er 2×2?

Definisjon 2.11 *(**Determinanten til en** 2×2**-matrise**) La A være matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Vi definerer determinanten til A som tallet $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Determinanten skrives gjerne $\det(A)$*, og en annen skrivemåte er å erstatte matriseparente-*

sene med vertikale streker. Vi har altså:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Eksempel 2.12

$$\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 6.$$

■

Vi kan definere determinanten til en $n \times n$-matrise der $n \geq 3$ også:

Definisjon 2.13 ***(Determinanten til en*** $n \times n$***-matrise)***

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= a_{11} \det M_1 - a_{12} \det M_2 + a_{13} \det M_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det M_n$$

der M_i er den $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fremkommer når vi stryker rad 1 og kolonne i.

Eksempel 2.14

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \not{1} & \not{2} & \not{3} \\ \not{4} & 5 & 6 \\ \not{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} \not{1} & \not{2} & \not{3} \\ 4 & \not{5} & 6 \\ 7 & \not{8} & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} \not{1} & \not{2} & \not{3} \\ 4 & 5 & \not{6} \\ 7 & 8 & \not{9} \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 1(5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5)$$
$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$
$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$
$$= 0.$$

■

På forelesning vil dere få en alternativ metode for å regne ut 3×3-determinanter.

2.4 Likninger

Hva hvis vi nå vil løse likninger med matriser??

Eksempel 2.15 "Jeg tenker på en matrise slik at $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ganger matrisen er lik $\begin{bmatrix} 68 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hvilken matrise tenker jeg på?"

Nå er den ukjente en matrise, og det første vi må gjøre er å finne størrelsen på den. Siden vi skal gange med en 2×2-matrise og få en 2×1-matrise, må den ukjente være en 2×1-matrise, og vi kaller de ukjente komponentene x og y. Oversetter vi problemet til matematikk, får vi dermed likningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hvis vi multipliserer ut venstresiden får vi

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi vet at to matriser er like når komponentene er like, dvs. vi får likningssystemet

$$\begin{aligned} x+y &= 68 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Virker det kjent? Ta en titt på Eksempel 1.9. Matrisen jeg tenker på er altså matrisen med Haakon og Märthas aldre. Hvordan vi finner denne matrisen skal vi lære i neste kapittel. ■

En likning av matriser av tilsvarende type som i dette eksempelet gir altså opphav til de kjente lineære likningssystemene fra Kapittel 1!

Og hvis vi starter med et lineært likningssystem, så kan vi sette opp en likning av matriser (bare jobb motsatt vei i eksempelet ovenfor for eksempel). Det viser seg at ved å jobbe med matrisen, får vi en veldig ryddig måte å løse likningssystemer på. Nettopp dette skal vi altså gjøre i neste kapittel.

Kapittel 3

Lineære likningssystemer og matriser

Nå skal vi sette sammen Kapittel 1 og 2:

3.1 Den utvidede matrisen til et likningssystem

Vi starter med et lineært likningssystem med m likninger og n ukjente:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3.1}$$

Ved å bruke definisjonen av produkt av matriser, kan dette systemet skrives (se også Eksempel 2.15):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Likningen (3.2) er likningssystemet (3.1) på *matriseform*.

La A være matrisen med a_{ij}-ene, X matrisen med x_i-ene og B være matrisen med b_i-ene. Da kan (3.2) skrives

$$AX = B,$$

som er en likning med matriser.

Definisjon 3.1 *Vi kaller matrisen A ovenfor for koeffisientmatrisen til likningssystemet* (3.1)*, mens matrisen* $\left[\begin{array}{cc} A & B \end{array}\right]$ *kalles den utvidede matrisen til likningssystemet.*

Når vi nå skal løse lineære likningssystemer, skal vi jobbe med den utvidede matrisen til systemet.

Eksempel 3.2 Den utvidede matrisen til likningssystemet

$$\begin{array}{rrcl} L_1: & x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 9 \\ L_2: & 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 1 \\ L_3: & 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

er matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

■

3.2 Radoperasjoner

Vi ønsker å løse generelle lineære likningssystemer. Vi kjører følgende strategi: Vi bytter ut systemet med et annet system som har samme løsningsmengde, men som er lettere å løse! Det høres jo ikke så dumt ut.

Når vi løste likningssystemer i Kapittel 1, jobbet vi med likningene (vi adderte dem og multipliserte dem med tall). Nå skal vi altså jobbe med den utvidede matrisen isteden. Dvs. at

ordet 'likning' erstattes av ordet 'rad'.

Når vi nå skal bytte ut systemet med et annet er det tre typer operasjoner vi skal bruke:

1) Multiplisere en rad med en konstant $\neq 0$.

2) Bytte om to rader.

3) Legge til et multiplum av en rad til en annen.

Disse operasjonene er nemlig mulig å gjøre uten at løsningsmengden til likningssystemet forandres!

Vi viser strategien først ved et eksempel:

Eksempel 3.3 Vi vil løse likningssystemet i Eksempel 3.2, og tar for oss den utvidede matrisen vi fant der (første gang vi gjør dette lønner det seg å ha likningssystemet ved siden av seg):

Vi har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kall radene i matrisen for R_1, R_2 og R_3. Det første vi ønsker er å få 0 i posisjonene (2,1) og (3,1) (dette tilsvarer å eliminere x_1 fra likning L_2 og L_3). Det får vi til ved å bruke operasjon **3)** ovenfor: vi legger $(-2) \cdot R_1$ til R_2 og legger $(-3) \cdot R_1$ til R_3. Da blir matrisen hetende

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi ser på hva som har skjedd i likningssystemet, så har L_2 og L_3 nå kun to ukjente hver.

Vi vil nå eliminere x_2 fra L_3, dvs. vi vil ha 0 i posisjon (3,2). Dette får vi til ved først å multiplisere R_2 med $\frac{1}{2}$ (bruker operasjon **1)**):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

og deretter legge $(-3) \cdot R_2$ til R_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi rydder opp i R_3 ved å multiplisere med -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

og L_3 sier nå at $x_3 = 3$!

Dermed gjenstår å finne x_1 og x_2. På matrisenivå gjøres dette ved å få 0 i posisjonene (1,2), (1,3) og (2,3), og det får vi til ved å legge $(-1) \cdot R_2$ til R_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

og tilslutt legge $(-\frac{11}{2}) \cdot R_3$ til R_1 og $(\frac{7}{2}) \cdot R_3$ til R_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

og da sier L_1 at $x_1 = 1$, L_2 sier at $x_2 = 2$, og L_3 altså at $x_3 = 3$, og vi har løst likningssystemet vårt. ■

3.3 Redusert trappeform

Vi løste altså likningssystemet i forrige eksempel ved å redusere den utvidede matrisen ned til matrisen

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

der vi kan lese av løsningen. Dette er et eksempel på en matrise som er på redusert trappeform:

Definisjon 3.4 *En matrise er på trappeform hvis **1)-3)** nedenfor er oppfylt. Hvis i tillegg vi har oppfylt punkt **4)** nedenfor, sier vi at matrisen er på redusert trappeform.*

1) *Hvis en rad ikke bare består av 0-ere, så er første tallet i raden som er forskjellig fra 0 lik 1 (denne 1-eren kalles en ledende 1-er, og i matrisen ovenfor har jeg streket under de ledende 1-erne).*

2) *Hvis det fins rader som bare består av 0-ere, så er de gruppert i bunnen av matrisen.*

3) *For hvert par av rader som ligger under hverandre og som ikke bare består av 0-ere, skal den ledende 1-eren i den nederste av de to radene være lengre til høyre enn den ledende 1-eren i raden over (derav ordet trapp).*

4) *Hver kolonne som inneholder en ledende 1-er har 0 overalt ellers.*

Eksempel 3.5 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

er på trappeform, men ikke redusert trappeform (overbevis deg selv, og finn trappen). ■

Når den utvidede matrisen til et lineært likningssystem er redusert til redusert trappeform, kan vi lese av løsningen til likningssystemet (også når vi har trappeform, men da må vi gjøre noen ekstra regninger). Vi har sett at et lineært likningssystem kan være inkonsistent (dvs. gir ikke mening og har ingen løsning) eller konsistent (med nøyaktig én eller uendelig mange løsninger).

Hvordan kan vi se hvor mange løsninger vi har fra den reduserte trappeformen?

Én løsning Den reduserte trappeformen vil være som i eksempelet (3.3), der vi fikk identitetsmatrisen pluss en kolonne til høyre.

Ingen løsning I den reduserte trappeformen vil vi få en rad som består av bare 0-ere, bortsett fra det siste tallet i raden, som er forskjellig fra 0, slik som nederste rad i (3.4). En slik rad vil svare til likningen "0=et tall forskjellig fra 0", som jo betyr at systemet er inkonsistent.

Uendelig mange løsninger Som vi så i Kapittel 1, vil vi få inn parametere her når vi presenterer løsningen. Dette kan vi se fra den reduserte trappeformen siden i dette tilfellet vil vi få færre ledende 1-ere enn kolonner i koeffisientmatrisen (som er antall ukjente). For eksempel hvis vi har redusert en utvidet matrise til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ser vi at vi har 3 likninger (antall rader), 4 ukjente (antall kolonner i koeffisientmatrisen) og vi har 3 ledende 1-ere. Denne matrisen tilsvarer systemet

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad + \; 3x_4 &= -4 \\ x_2 \quad\quad + \; 2x_4 &= 1 \\ x_3 \; + \; 6x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Vi ser at variablene x_1, x_2 og x_3 svarer til de ledende 1-erne. Disse kalles derfor *ledende variable*. Variablene som ikke svarer til ledende

1-ere kalles *frie variable* (her: x_4), nettopp fordi de er frie og kan velges til hva som helst. Vi innfører dermed parametere for de frie variablene. Antall parametere vi trenger gir oss *dimensjonen* til løsningsmengden.

Hvis vi innfører en parameter for x_4 i vårt eksempel, kan vi finne uttrykk for de andre variablene, og få løsninger:

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_1 &= -4 - 3t \\ x_2 &= 1 - 2t \\ x_3 &= 2 - 6t, \end{aligned}$$

og i Kapittel 1 ble løsningene dermed presentert som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(-4 - 3t, 1 - 2t, 2 - 6t, t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Nå som vi har lært om matriser kan vi også presentere løsningene som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 3t \\ 1 - 2t \\ 2 - 6t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi har én parameter, så løsningsmengden er 1-dimensjonal (en linje i $\mathbb{R}^4$...).

3.4 Gauss-Jordan eliminasjon

Vi har nå sett hvordan vi kan løse lineære likningssystemer når vi har den utvidede matrisen på redusert trappeform. Vi skal nå gi oppskriften for å redusere en matrise til trappeform (kalt Gauss-eliminasjon) og videre til redusert trappeform (kalt Gauss-Jordan eliminasjon). Vi fulgte metoden i Eksempel 3.3, så ta en titt på det igjen, helst mens du leser oppskriften.

Redusere en matrise til trappeform 1) (Ta 500 g hvetemel...) Finn førs-

te kolonne (fra venstre) som ikke bare har 0-ere.

2) Hvis kolonnen du fant i **1)** har 0 i første rad, bytt første rad med en annen rad slik at komponenten i første rad i kolonnen fra **1)** er forskjellig fra 0.

3) La a være komponenten i første rad i kolonnen fra **1)**. Multipliser første rad med $\frac{1}{a}$ for å lage en ledende 1-er.

4) Legg til passende multipler av første rad til radene under slik at komponentene under den ledende 1-eren blir 0.

5) Dekk over første rad og start på **1)** med undermatrisen som gjenstår. Fortsett slik til du har fått hele matrisen på trappeform.

og redusert trappeform 6) Start fra bunnen av matrisen med første rad nedenfra som ikke bare har 0-ere, og jobb oppover rad for rad: For hver rad, legg til passende multipler av raden til radene ovenfor for å få 0-ere over de ledende 1-erne.

For hver gang vi gjør noe med matrisen pleier vi å skrive symbolet $\sim$, og gjerne hva vi har gjort.

Eksempel 3.6 Reduseringen av matrisen i Eksempel 3.3 kan dermed regnes

slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-2\cdot R_1 \text{til} R_2 \\ -3\cdot R_1 \text{til} R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \overset{-3\cdot R_2 \text{til} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{-2\cdot R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{-1\cdot R_2 \text{til} R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{-\frac{11}{2}\cdot R_3 \text{til} R_1 \\ \frac{7}{2}\cdot R_3 \text{til} R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

■

3.5 Et nyttig resultat...

...eller hva sier du om følgende resultat, nå når du har regnet deg svett i løpet av helgen? Det viser seg nemlig at determinanten (som vi lærte å regne ut i Seksjon 2.3) til koeffisientmatrisen til likningssystemet sier oss noe om hvor mange løsninger systemet har. (Noen ganger er vi bare interessert i hvor mange løsninger vi har, og ikke nødvendigvis så interessert i å finne dem.)

Teorem 3.7 *Anta at vi har et lineært likningssystem med n likninger og n ukjente, og la A være koeffisientmatrisen til systemet.*

Hvis $\det(A) \neq 0$ *, har likningssystemet nøyaktig én løsning.*

Hvis $\det(A) = 0$ *, har likningssystemet enten ingen eller uendelig mange løsninger.*

□

Resultatet er litt vanskelig å bevise, men du får lov til å bruke det allikevel. Prøv det ut på noen av oppgavene du allerede har regnet og se at det stemmer!

3.6 Konklusjon

Når dere kommer til kapittel 10 i Gulliksen (når eksamen nærmer seg) vil dere lære noen flere anvendelser og blant annet regne flere tekstoppgaver i dette stoffet, og med denne helgen som basis er dere meget godt rustet. Fortsatt lykke til med semesteret!

Tillegg A

Oppgaver

Oppgave 1. Avgjør om likningene nedenfor er lineære likninger i x_1, x_2 og x_3. Gi en kort begrunnelse.

a) $x_1 - \pi x_2 + \frac{5}{3}x_3 = 1$
b) $3x_1 - x_2 + 5x_3 = x_1$
c) $x_1^2 - 4x_2 = 0$
d) $7x_1 - x_2 + 3x_3 = e^3$
e) $2^4 x_1 - x_2 x_3 = 5$

Oppgave 2. Løs følgende likningssystemer:
a) $L_1\colon\ 7x - 5y = 3$

b) $L_1\colon\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

c)

$L_1\colon\quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$L_2\colon\quad -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
$L_3\colon\quad 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

d)

$L_1\colon\quad 2x - 3y = -2$
$L_2\colon\quad 2x + y = 1$
$L_3\colon\quad 3x + 2y = 1$

e)

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ L_2: &\quad -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ L_3: &\quad 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x - y + 2z - w = -1 \\ L_2: &\quad 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ L_3: &\quad -x + 2y - 4z + w = 1 \\ L_4: &\quad 3x - 3w = -3 \end{aligned}$$

Oppgave 3. Gjør rede for de geometriske fenomenene som kan forekomme når vi har et system av tre likninger med to variable. For hvert fenomen, skriv ned hvor mange løsninger systemet har.

Oppgave 4. Gi eksempler på to likninger i to variable som har a) ingen, b) én og c) uendelig mange løsninger.

Oppgave 5. Er lang. Spar den gjerne til lørdagskvelden. (Basert på oppgave 1.1 i "Visuelle perspektiv Lineæralgebra", R. Rinvold).

I denne oppgaven skal vi se på et likningssystem med tre likninger i tre variable, og se hva som skjer algebraisk når vi flytter oss mellom noen av de geometriske mulighetene vi har. Illustrasjonene refererer til illustrasjonene a)-h) på tegningen i Seksjon 1.5.

Vi har gitt likningssystemet L:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad x - y + z = 1 \\ L_3: &\quad 2x + 3y - z = 2. \end{aligned}$$

a) Løs systemet L både med substitusjonsmetoden og addisjonsmetoden.
b) Bruk a) til å finne en løsning av L for 1) $x = 10$ og 2) $z = 5$.
c) Hvilken av illustrasjonene a)-h) illustrerer det geometriske fenomenet som tilsvarer situasjonen for likningssystemet L best? Begrunn svaret.

d) Hva skjer med løsningen(e) til L når 2 på høyresiden i L_3 byttes ut med 3? Hvilken av illustrasjonene a)-h) har vi nå?
e) For å få akkurat én løsning av L (illustrasjon f)), må vi endre på venstresiden i likningene i L. Forsøk å endre på koeffisienten til x i L_3. Løs likningssystemet du da får. Forklar algebraisk og geometrisk hva som skjer.
f) Vi har nå sett konkrete eksempler på tre av illustrasjonene a)-h). For hver av de resterende illustrasjonene, la L_1 være uforandret, og forandre på L_2 og/eller L_3 slik at vi får likningssystemer som gir eksempler på disse illustrasjonene også.

Oppgave 6. La A, B, C, D og E være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Hva er størrelsene på matrisene A, B, C, D og E?
b) For hvert av de følgende matriseuttrykkene, avgjør om uttrykket er definert. Begrunn svaret. For de uttrykkene som er definert, regn ut uttrykket.

1) AB
2) $AB + C$
3) $3E$
4) $DA - B$
5) $BD + A$
6) $ABD + 2CE$

Oppgave 7. Når vi for eksempel regner ut "$3 \cdot 5 + 4 \cdot 6$", må vi utføre to multiplikasjoner og én addisjon.
La A være en $m \times n$ matrise og B være en $n \times p$ matrise. Hvor mange

multiplikasjoner og hvor mange addisjoner må vi utføre for å regne ut matriseproduktet AB?

Oppgave 8. Finn 2×2 matriser A og B slik at

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Oppgave 9. Regn ut determinantene

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Oppgave 10. Vis at produktet av to diagonale $n \times n$ matriser er en diagonal $n \times n$ matrise. Lag en regel for å multiplisere diagonale matriser.

Oppgave 11. Vis at hvis begge produktene AB og BA er definerte, så er AB og BA kvadratiske matriser.

Oppgave 12. Vis så mange av reglene i Teorem 2.10 som du har lyst til.

(Kvelden er lang.) Ikke fasit her, men spør heller.

Oppgave 13. a) For hver av matrisene nedenfor, avgjør om matrisen er på trappeform og /eller redusert trappeform. Begrunn kort.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Sett opp et likningssystem som har 5) som utvidet matrise. Løs likningssystemet.

c) Forklar følgende påstand: Hvis A er en kvadratisk $n \times n$ matrise på redusert trappeform uten noen rader med bare 0-ere, så er $A = I_n$ (identitetsmatrisen).

Oppgave 14. a) Løs likningssystemene i oppgave 2 c)-f) med Gauss-eliminasjon.

b) Løs følgende likningssystemer med Gauss-Jordan eliminasjon.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
1) & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -15 \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\
 & -6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 30
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
2) & 4x_1 & - & 8x_2 & = & 12 \\
 & 3x_1 & - & 6x_2 & = & 9 \\
 & -2x_1 & + & 4x_2 & = & -6
\end{array}
$$

Oppgave 15. For hvilke verdier av a har følgende likningssystem ingen løsning? Nøyaktig én løsning? Uendelig mange løsninger?

$$
\begin{array}{lcl}
x + 2y - 3z & = & 4 \\
3x - y + 5z & = & 2 \\
4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2
\end{array}
$$

Oppgave 16. a) La n være et naurlig tall. Løs likningssystemet

$$
\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ 5x + 3y + z = n \end{array} \right\}.
$$

b) Under OL i Torino i år ble det arrangert diverse lokale tippekonkurranser. Her er én variant: 24 øvelser ble plukket ut der man skulle tippe vinneren i hver av øvelsene. Man fikk 5 poeng hvis den man tippet tok gull i øvelsen, 3 poeng hvis tipset tok sølv, og 1 poeng hvis tipset tok bronse. Hvis den man tippet ikke tok medalje ble det 0 poeng. Vi antar at alle tipperne hadde litt peiling/flaks, slik at ingen fikk totalt 0 poeng.

Ragnar og Elisabeth var to av tipperne. Ragnar endte opp med 82 poeng, mens Elisabeth fikk 64 poeng. Det viste seg at blant Elisabeth sine tips var det like mange gull som antall sølv hos Ragnars tips, like mange sølv som

antall bronse hos Ragnars tips, og like mange bronse som antall gull hos Ragnars tips! Hvordan fordelte henholdsvis Elisabeth og Ragnar sine tips seg på antall gull-, sølv- og bronsemedaljer?

Tillegg B

Fasit

Oppgave 1. Begrunn. (Når man kun bruker definisjonen i begrunnelsen, kan man etterhvert si 'per definisjon er dette en lineær likning'. Det er imidlertid alltid nyttig å minne seg selv på hva definisjonen man bruker sier!)

a) Lineær.($a_1 = 1, a_2 = -\pi, a_3 = \frac{5}{3}, b = 1$)

b) Lineær.($a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 5, b = 0$)

c) Ikke lineær. Vi har leddet x_1^2 som ikke er på formen '$a_1 x_1$ for a_1 en reell konstant'.

d) Lineær.($a_1 = 7, a_2 = -1, a_3 = 3, b = e^3$)

e) Ikke lineær. Leddet $x_2 x_3$ er ikke på formen '$a_i x_i$ for a_i en reell konstant og x_i en variabel'.

Oppgave 2.

a) $(x, y) = \{(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

b) $(x_1, x_2, x_3) = \{(\frac{5}{3}s - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$

c) $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 2)$

d) Inkonsistent system, dvs. ingen løsninger.

e) $(x_1, x_2, x_3) = \{(-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, t) | t \in \mathbb{R}\}$

f) $(x, y, z, w) = \{(s - 1, 2r, r, s) | s, r \in \mathbb{R}\}$

Oppgave 3. Tre likninger med to variable gir tre linjer i planet. Vi kan ha **ingen løsning**, dvs. linjene har ingen felles skjæringspunkter (alle tre linjene er parallelle og ikke sammenfallende, nøyaktig to av linjene er parallelle og

ikke sammenfallende, nøyaktig to sammenfallende linjer og den tredje parallell til disse, eller linjene "lager en trekant"), **én løsning**, dvs. ett felles skjæringspunkt (nøyaktig to sammenfallende linjer og den tredje skjærer, eller tre ikke-sammenfallende linjer som skjærer i ett punkt), eller **uendelig mange løsninger** (tre sammenfallende linjer).

Oppgave 4.
a) ingen: $L_1 : x + y = 5$ og $L_2 : x + y = 10$ (parallelle linjer siden samme stigningstall)
b) én: $L_1 : x + y = 5$ og $L_2 : 2x + y = 5$ (forandrer stigningstallet: linjene får ett skjæringspunkt)
c) uendelig: $L_1 : x + y = 5$ og $L_2 : 2x + 2y = 10$ (sammenfallende linjer)

Oppgave 5.
a) Substitusjonsmetoden: Substituerer $x = 1 + y - z$ (fra L_2) som gir

$$\begin{aligned} \text{satt inn i } L_1: &\quad 5y - 3z = 0 \\ \text{satt inn i } L_3: &\quad 5y - 3z = 0 \end{aligned}$$

dvs, $y = \frac{3}{5}z$. Vi kan nå uttrykke løsningsmengden til L med en parameter t:

$$\begin{aligned} y &= t \\ z &= \tfrac{5}{3}t \\ x &= 1 + t - \tfrac{5}{3}t = 1 - \tfrac{2}{3}t. \end{aligned}$$

Dette gir en linje i rommet, altså uendelig mange løsninger (t varierer). Obs.: Det fins flere parameterfremstillinger for denne linjen.
Eliminasjonsmetoden: Vi eliminerer x ved å trekke L_2 fra L_1, som gir likningen $5y - 3z = 0$. Videre eliminerer vi x ved å regne ut $L_3 - 2L_2$, som også gir likningen $5y - 3z = 0$. Dette gir samme parameterløsning som substitusjonsmetoden.
b) Vi finner hva parameteren t må være i de to tilfellene (har du brukt en annen parameterfremstilling i a), får du en annen t-verdi, men x, y og z skal

bli de samme som nedenfor):

$$\begin{aligned} &1) x = 10: \quad t = -\tfrac{27}{2}, \quad \text{så } y = -\tfrac{27}{2}, z = -\tfrac{45}{2} \\ &2) z = 5: \quad t = 3, \qquad \text{så } y = 3, x = -1 \end{aligned}$$

c) Likningene L_1 og L_2 gir to plan som skjærer hverandre i en rett linje l (siden likningene sier at planene hverken er parallelle eller sammenfallende). Videre har vi sett i a) at løsningsmengden til L er en linje, så det tredje planet (fra likningen L_3) må skjære de andre planene i l, dvs. illustrasjon e).
d) Algebraisk: Når vi legger sammen L_1 og L_2, får vi $2x + 3y - z = 2$. Den nye L_3 gir likningen $2x + 3y - z = 3$. Dermed får det nye likningssettet ingen løsning (ved å trekke disse likningene fra hverandre får vi "$0 = -1$", som ikke er mulig).
Geometrisk: Planet tilsvarende den nye L_3 er en parallellforskyvning av planet tilsvarende (gamle) L_3, slik at det nye planet ikke treffer linjen der planene tilsvarende L_1 og L_2 skjærer hverandre, altså illustrasjon c).
e) For eksempel: Sett koeffisienten til x i L_3 lik 1.
Algebraisk: $L_1 - L_2$ gir likningen $5y - 3z = 0$ og $L_2 - L_3$ (med $1x$) gir nå likningen $-4y + 2z = -1$. Når vi løser disse to likningene for y og z og setter inn for x, gir dette én løsning, nemlig punktet $x = 0, y = \frac{3}{2}, z = \frac{5}{2}$.
Geometrisk: Planet til likningen vi forandrer (L_3), "vippes" litt, slik at planene kun får ett punkt felles, og vi går fra illustrasjon e) til f) (men planene trenger ikke være normalt på hverandre, slik det kan se ut som de er i illustrasjon f)).

f) Husk at den generelle likningen for et plan i rommet er $ax + by + cz = d$, der vektoren (a, b, c) kalles normalvektoren til planet. Vi bruker at to plan er parallelle hvis og bare hvis normalvektorene til planene er parallelle. Det er flere løsninger her, og nedenfor er det gitt ett mulig eksempel på likningssett tilhørende hver av de resterende illustrasjonene:
Illustrasjon a):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad 2x + 8y - 4z = 5 \\ L_3: &\quad x + 4y - 2z = 3. \end{aligned}$$

Illustrasjon b):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad 2x + 8y - 4z = 5 \\ L_3: &\quad 2x + 3y - z = 2. \end{aligned}$$

Illustrasjon d):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad 2x + 8y - 4z = 2 \\ L_3: &\quad 3x + 12y - 6z = 3. \end{aligned}$$

Illustrasjon g):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad 2x + 8y - 4z = 2 \\ L_3: &\quad 2x + 8y - 4z = 1. \end{aligned}$$

Illustrasjon h):

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x + 4y - 2z = 1 \\ L_2: &\quad 2x + 8y - 4z = 2 \\ L_3: &\quad 2x + 3y - z = 2. \end{aligned}$$

Oppgave 6. a) Størrelsen til en matrise: antall rader (horisontale linjer) $\times$ antall kolonner (vertikale linjer). A er 3×2, B er 2×2, C er 3×3, D er 2×3 og E er 3×3.
b)
1) Produktet av to matriser er definert hvis og bare hvis antall kolonner i den første matrisen er lik antall rader i den andre matrisen. Siden A har 2 kolonner og B har 2 rader, er produktet AB definert.

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 27 & 8 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}.$$

2) Summen av to matriser er definert hvis og bare hvis matrisene har samme størrelse. Siden AB har størrelse 3×2 og C har størrelse 3×3, er ikke summen $AB + C$ definert.

3) Et reelt tall multiplisert med en matrise er alltid definert, spesielt er $3E$ definert.

$$3E = \begin{bmatrix} 27 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 12 \\ 15 & 0 & 21 \end{bmatrix}.$$

4) Produktet DA er definert siden D har like mange kolonner som A har rader. DA blir en 2×2 matrise, og B er også en 2×2 matrise. Dermed er $DA - B$ definert.

$$DA - B = \begin{bmatrix} 29 & 7 \\ 21 & 12 \end{bmatrix}.$$

5) BD er en 2×3 matrise og A er en 3×2 matrise, dermed er ikke summen $BD + A$ definert.
6) AB er definert (og regnet ut i 1)) og blir 3×2, så ABD blir 3×3. Matrisen $2CE$ er også 3×3, så summen er definert.

$$ABD + 2CE = \begin{bmatrix} 8 & 28 & 68 \\ 16 & 59 & 151 \\ 16 & 57 & 141 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 164 & 40 & 84 \\ 100 & 10 & 34 \\ 178 & 60 & 170 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 172 & 68 & 152 \\ 116 & 69 & 185 \\ 194 & 117 & 311 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7. For hver av komponentene i produktet AB må vi utføre n multiplikasjoner og $n - 1$ addisjoner. Siden AB har mp komponenter, må vi totalt utføre mpn multiplikasjoner og $mp(n - 1)$ addisjoner.

Oppgave 8. Siden

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2,$$

leter vi etter matriser A og B slik at $AB \neq BA$. Disse vil da gi eksempler på det vi ønsker. For eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9. a) 22
b) 52
c) -65
d) 320

Oppgave 10. Vi regner ut produktet av to diagonale $n \times n$ matriser og ser at produktet også blir en $n \times n$ diagonal matrise:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

Produktet av diagonale matriser blir en diagonal matrise der komponenten i i. rad og i. kolonne er produktet av de tilsvarende komponentene i faktormatrisene i produktet.

Oppgave 11. La A være en $m \times s$ matrise og la B være en $r \times n$ matrise. Siden AB er definert, er $s = r$ og siden BA er definert, er $n = m$ (eksempel: A er 2×3 og B er 3×2).

Produktet AB blir en $m \times n$ matrise og siden $n = m$ blir den kvadratisk (i eksempelet: AB er 2×2). Produktet BA blir en $s \times r$ matrise, og siden $s = r$, blir denne også kvadratisk (i eksempelet: BA er 3×3).

Oppgave 13.
1) Er på redusert trappeform (og dermed også trappeform) siden vi har 0-ere både over og under de ledende 1-erne.

2) Er ikke på trappeform siden 1-eren i rad 3 står til venstre for 1-eren i rad 2 (bytte av rad 2 og 3 gir redusert trappeform).
3) Er på redusert trappeform siden vi har 0-ere både over og under de ledende 1-erne.
4) Er ikke på trappeform siden vi har tall forskjellig fra 0 under den ledende 1-eren i rad 1.
5) Er på trappeform siden vi har 0-ere under de ledende 1-erne. Den er ikke på redusert trappeform siden vi har tall forskjellig fra 0 over to av de ledende 1-erne.

b) Likningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 &= 6 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Vi ser at x_1, x_3 og x_5 tilsvarer ledende 1-ere og er ledende variable, mens x_2 og x_4 er frie variable. Vi kan nå innføre parametere for de fri variablene og substituere baklengs (eller bruke siste punkt i Gauss-Jordan eliminasjon):

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_4 &= s \\ x_3 &= 6 - 18 - s = -12 - s \\ x_1 &= 3 + 2(-12 - s) - 7t = -21 - 2s - 7t \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

På matriseform blir løsningsmengden:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 - 2s - 7t \\ t \\ -12 - s \\ s \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s,$$

der $t, s \in \mathbb{R}$.

c) Siden A ikke har noen rader med 0-ere, har vi ledende 1-ere i hver rad (dvs. n stykker). Siden vi har redusert trappeform har vi 0-ere både over og under de ledende 1-erne, og siden to påfølgende rader med ledende 1-ere skal ha den ledende 1-eren i øverste rad til venstre for den ledende 1-eren i raden nedenfor, får vi at alle de n ledende 1-erne ligger på diagonalen, dvs. identitetsmatrisen.

Oppgave 14. a) Se fasit for oppgave 2.

b) 1) Radoperasjoner på den utvidede matrisen gir:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}\cdot R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{-5\cdot R_1 \text{til} R_2 \\ -3\cdot R_1 \text{til} R_3 \\ 6\cdot R_1 \text{til} R_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 25 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-3\cdot R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \text{til} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{7}\cdot R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & 1 & -11 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{11\cdot R_3 \text{til} R_2 \\ \frac{1}{3}\cdot R_3 \text{til} R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-\frac{2}{3}\cdot R_2 \text{til} R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får én løsning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2) Radoperasjoner på den utvidede matrisen gir:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har x_2 som fri variabel, og innfører parameter:

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_1 &= 3 + 2t \end{aligned}$$

På matriseform blir løsningsmengden:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

der $t \in \mathbb{R}$, dvs. uendelig mange løsninger.

Oppgave 15.
Ingen løsning: $a = -4$, én løsning: $a \neq \pm 4$ og uendelig mange løsninger for $a = 4$.

Oppgave 16. a) Vi reduserer den utvidede matrisen til likningssystemet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & 3 & 1 & n \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & n - 120 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{120-n}{2} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-72+n}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{120-n}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dermed får vi løsninger

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-72+n}{2} + t \\ \frac{120-n}{2} - 2t \\ t \end{bmatrix} ;\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

b) Vi bruker oppgave a) og lar x = antall gull, y = antall sølv og z = antall bronse. Da blir mulige medaljefordelinger:

Ragnar $(n = 82)$ $\begin{bmatrix} 5+s \\ 19-2s \\ s \end{bmatrix}$ der $0 \leq s \leq 9$.

Elisabeth $(n = 64)$ $\begin{bmatrix} -4+t \\ 28-2t \\ t \end{bmatrix}$ der $4 \leq t \leq 14$

Opplysningene gir likningene

$$\begin{aligned} -4+t &= 19-2s \\ 28-2t &= s \\ t &= 5+s \end{aligned}$$

som gir $t = 11, s = 6$, dvs. Ragnar sine tips tok 11 gull, 7 sølv og 6 bronse, mens Elisabeth sine tips altså tok 7 gull, 6 sølv og 11 bronse.