MA 100

Sett 2: Innleveringsfrist 19/11-99.

Oppgave 1: Regn ut integralene

a) $\int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$

c) $\int_0^{1/2} \arctan\sqrt{x}\, dx$

d) $\int_0^1 \ln x\, dx$

Oppgave 2: Finn grenseverdiene

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$

Oppgave 3:

a) Løs differensligningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0$$

og skriv løsningen på både kompleks og reell form.

b) Løs differensialligningen

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

c) Finn y slik at

$$y'' + 2y' + 4y = x\, e^x$$

og $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Oppgave 4: a) Vis at $z = -1 + 2i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + z - 10$$

b) Finn den komplekse og reelle faktoriseringen til $P(z)$.

c) Løs integralet $\int \frac{3x^3+5x+4}{x^3+x-10} dx$

Oppgave 5: 10 millioner tonn søppel blir ved tiden $t = 0$ deponert på en midlertidig lagringsplass. Søppelet inneholder 200000 tonn av et skadelig stoff som brytes ned med en jevn fart av 5%/år.

a) La $y(t)$ være prosentdelen av skadelig stoff i søppelet etter t år. Forklar hvorfor

$$y'(t) = -0.05y(t) \qquad\qquad y(0) = 2$$

og vis at $y(t) = 2e^{-0.05t}$.

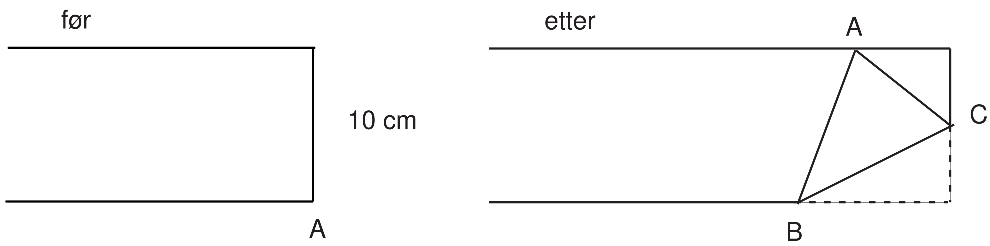
b) Søppelet blir overført til en permanent lagringsplass med en jevn fart av 1/2 million tonn/år. På den nye lagringsplassen blir søppelet behandlet slik at det skadelige stoffet brytes ned med en fart av 10% per år. La $z(t)$ være antall millioner tonn skadelig stoff på den nye lagringsplassen etter t år. Forklar hvorfor

$$z(t) = -0.1z(t) + 0.01e^{-0.05t} \qquad\qquad z(0) = 0$$

når $t < 20$.

c) Finn $z(t)$.

Oppgave 6: Du har en lang papirstripe som er 10 cm bred. Du ønsker å brette hjørnet A opp



på den øverste kanten slik at linjestykket BC blir kortest mulig (se figuren). Hvordan må du brette?