Galerkins metode

Vi ser på den enkle differensialligningen

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

og vi søker tilnærminger til løsningen på formen

$$U(t) = u_0 + \sum_{j=1}^{N} c_j t^j, \tag{2}$$

der c_j $j = 1, \ldots, N$ er konstanter.

a. Vis at $U(t)$ er en løsning bare dersom $u_0 = 0$.

Definer

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt,$$

for kontinuerlige funksjoner f og g, og sett

$$P_0^N = \{\text{polynomer } p(t) \text{ av grad} \leq N,\, t \in [0,1] \text{ og } p(0) = 0\}.$$

b. Vis at P_0^N er et vektorrom, og at $(\cdot,\cdot)$ blir et indreprodukt på P_0^N. Vis at $p_k(t) = t^k$, $k = 1, \ldots, N$ blir en basis for P_0^N.

Vi definerer nå approksimasjonen U ved å kreve at

$$(U' - \lambda U, p) = 0, \quad \text{for alle } p \in P_0^N. \tag{3}$$

Spesiellt får vi at

$$(U' - \lambda U, p_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, N.$$

c. Vis at dette gir følgende ligningsystem for å bestemme c_j, $j = 1, \ldots, N$,

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{j+k} - \frac{\lambda}{j+k+1} \right) c_j = \frac{\lambda u_0}{k+1}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

La $c = (c_1, \ldots, c_N)^T$, $b = \lambda u_0 (1/2, 1/3, \ldots, 1/(N+1))^T$, og la matrisen A være gitt ved

$$A_{ij} = \left(\frac{j}{j+i} - \frac{\lambda}{j+i+1} \right), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

d. Lag en (MATLAB) rutine som setter opp A og b, og lag (eller bruk en ferdiglaget en f.eks. `c=A\b` i MATLAB) rutine for å løse ligningsystemet $Ac = b$.

e. Sett $\lambda = u_0 = 1$, og plott $U(t)$ sammen med den eksakte løsningen $u(t) = e^t$ for $t \in [0,1]$, for $N = 2$, $N = 3$ og $N = 10$. Hvis du bruker MATLAB så kan rutinen "`polyval`" være nyttig, hvis du ikke kjenner denne, bruk "`help polyval`" i MATLAB.

f. Plott $U(t)$ for $N = 3$ og $t \in [0,1]$ sammen med Taylorpolynomet til $u(t)$ av grad 3. Kommenter resultatene.

g. Lag en tabell av $|U(0.75) - u(0.75)|$ for $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Virker det som om $U(0.75)$ konvergerer mot $e^{0.75}$? Svaret skal begrunnes.

La $\|\cdot\|$ være normen definert ved indreproduktet $(\cdot,\cdot)$, dvs.,

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

La p være en vilkårlig vektor i P_0^N og sett $F(\xi) = \|u - (U + \xi p)\|^2$, der ξ er et reellt tall. Vi *ønsker* at U skal være den beste approximasjonen på formen $u_0 + P_0^N$, i den forstand at $F(0) < F(\xi)$ for $\xi \neq 0$.

h. Vis at $F(\xi)$ blir et andregradspolynom i ξ, som har entydig minimum i $\xi = 0$ hvis og bare hvis $(u, p) = (U, p)$. Forklar hvorfor dette medfører kravene (3). Altså er U den beste tilnærmingen til u på formen $u_0 + P_0^N$ i den forstand at

$$\|u - U\| \leq \inf_{p \in P_0^N} \|u - (u_0 + p)\| .$$

Галеркин (1871–1945) ble født i 1871 i Polotsk i Hviterussland, og fikk sin utdannelse i St. Petersburg og Kharkov. Han begynte med sin forskning mens han satt fengslet i 1906 for deltagelse i den anti-tsaristiske bevegelse. Senere hadde han sterk inflytelse på ingeniørvirket i Sovjetunionen. Dette var ikke minst på grunn av det som nå heter Galerkins metode. Galerkin er en av meget få matematikere som har sittet fengslet på grunn av sin matematikk – andre sovjetiske ingeniører stolte for mye på Galerkins metode, og brukte en eller to ledds approksimasjoner for konstruksjoner som seinere brøt sammen. Stalin holdt Galerkin personlig ansvarlig og han havnet i fengsel (igjen).

Some people say that
"the purpose of computing is insight, not numbers",
although others claim that
"the purpose of computing numbers is not yet in sight".
R.W. Hamming.