fil: `M214alle.tex` *NOTAT av G. Berge: 2. oktober 2002*

Utvalde emne i M214

G. Berge

2. oktober 2002

Førelesingar hausten 1999.
Dette er tillegg til læreboka av Alan W. Bush.

FØREORD

Dette kompendiet er eit tillegg til pensumboka Alan W. Bussh: Perturbation Methods for Engeneers and Scientists. CRC Press.

Den erstattar tidlegare pensum som var eit kompendium av K. B. Dysthe og utdrag av eit kompendium av P. C. Hemmer. Det er gjort visse justeringar. Litt nytt stoff er teke med, noko gamalt stoff er sløyfa, men i hovudsak er stoffutvalet uendra.

Matematisk institutt, Universitetet i Bergen den 4. november 1999
Retta den 26.09.2002
Gerhard Berge

Innhald

1 Ordensrelasjonar. Asymptotiske rekkjer **1**
1.1 Ordens-symbola . . . 1
1.2 Eksempel . . . 2
1.2.1 Kombinasjonar av ordensrelasjonar . . . 2
1.3 Asymptotiske følgjer, utvikling, og rekkjer . . . 2
1.3.1 Rekning med asymptotiske følgjer . . . 3
1.3.2 Koeffisientane i ei asymptotisk utvikling . . . 3
1.3.3 Asymptotisk utvikling av integral . . . 4

2 Midlingsmetoden **5**
2.1 Innleidande merknader . . . 5
2.2 MIDLINGSMETODEN . . . 6
2.3 Nokre eksempel . . . 8

3 Dynamiske system **13**
3.1 Introduksjon . . . 13
3.2 Generelle system, faserom . . . 13
3.2.1 Eksistens og eintyde . . . 14
3.3 Væske-bilete . . . 16
3.4 Konservative, dissipative system . . . 17
3.4.1 Hamiltonsk system . . . 17
3.5 Likevekt og stabilitet . . . 19
3.5.1 Stabilitet av likevekt . . . 19
3.5.2 Klassifisering av likevekt i to dimensjonar . . . 20
3.6 Banestabilitet . . . 24
3.7 Liapunov stabilitet . . . 25
3.7.1 Liapunov-eksponentar . . . 26
3.7.2 Ein spesiell klasse lineære system I . . . 27
3.7.3 Struktur av n-dimensjonale lineære system . . . 28
3.7.4 Ein spesiell klasse lineære system II . . . 30
3.8 Lineære system, periodiske koeffisientar . . . 32
3.8.1 Stabilitet av periodiske system . . . 34
3.9 Liapunov sin direkte metode . . . 36
3.9.1 Positivt definitte funksjonar, eigenskapar . . . 37
3.9.2 Liapunov kriterier for stabilitet . . . 38
3.10 Stabilitet av den lineære approksimasjonen . . . 42
3.11 Attraktorar . . . 45
3.12 Poincaré-snitt . . . 48

4 Universelle ikkje-lineære prosessar **50**
4.1 Periode-dobling . . . 50
4.1.1 Funksjonell iterasjon . . . 52
4.1.2 Fiks-punkt oppførsel under funksjonell iterasjon . . . 53
4.2 Universell grense for høge iterasjonar . . . 61
4.3 Bifurkasjonar . . . 63
4.3.1 Høygaffel-bifurkasjon . . . 63
4.3.2 Hopf-bifurkasjon . . . 63
4.4 Verknad av små skilnader i startkrav . . . 64

4.5 "Underlege"attraktorar og fraktalar 66
4.6 Dimensjon 66
4.6.1 Kapasitet-dimensjon 67
4.7 Henon attraktoren 68
4.8 Periode-3 utvikling 69
4.9 Deterministisk kaos 70
4.10 Praktisk nytte 72

A Eksistens og eintyde for først ordens ODE **75**
A.1 Suksessive tilnærmingar eller Picard itereasjonar 75
A.2 Lipschitz-kravet 76
A.3 Eksistens og eintyde teorem 77

B Superstabile banar **80**

C Den universelle konstanten α **83**

1 Ordensrelasjonar. Asymptotiske rekkjer

I det følgjande skal ϕ og ψ vere funksjonar av x og ϵ der x kan vere ein vektor eller skalar og ϵ er ein skalar.

1.1 Ordens-symbola

Lat $\epsilon \in I$ og $x \in D$ i det som følgjer:

Definisjon I: Stor $\mathcal{O}$

Vi har $\phi \stackrel{def}{=} \mathcal{O}(\psi)$ *dersom det for ein fast verdi for* x *finst ein* $k(x) < \infty$ *og ein* ϵ*-omeign om* ϵ_0*,* N_ϵ*, slik at*

$$\epsilon \in I \cap N_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |\phi| \leq k(x)|\psi| \,. \tag{1}$$

Dersom $\psi \neq 0$ i det aktuelle området , er dette ekvivalent med at grensa

$$\lim_{\epsilon \to \epsilon_0} \frac{\phi}{\psi} \tag{2}$$

eksisterer.

Definisjon II: Liten o

Vi har $\phi \stackrel{def}{=} o(\psi)$ *dersom det for ein fast verdi for* x *og ein vilkårleg* $\delta(x) > 0$ *finst ein* ϵ*-omeign om* ϵ_0*,* N_δ *slik at*

$$\epsilon \in I \cap N_\delta \quad \Rightarrow \quad |\phi| \leq \delta(x)|\psi| \,. \tag{3}$$

Dersom $\psi \neq 0$ i det aktuelle området , er dette ekvivalent med at grensa

$$\lim_{\epsilon \to \epsilon_0} \frac{\phi}{\psi} = 0 \tag{4}$$

Definisjon III: Uniformitet

Dersom storleikane $k(x)$ *og* $\delta(x)$ *og områda* N_ϵ *og* N_δ *ovanfor kan veljast slik at relasjonane gjeld for all* $x \in D$*, så seier vi at ordensrelasjonane gjeld uniformt i* D*.*

Vi skal sjå mange døme på at dette ikkje held, og at årsaka til mange av dei problema ein møter kan førast tilbake til ikkje uniform oppførsel.

1.2 Eksempel

$$\begin{aligned}
\sin\epsilon &= \mathcal{O}(\epsilon)\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\cos\epsilon &= \mathcal{O}(1)\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\sinh\epsilon &= \mathcal{O}(\epsilon)\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\sinh\frac{1}{\epsilon} &= \mathcal{O}(e^{\frac{1}{\epsilon}})\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\sin\epsilon} &= \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\sin\epsilon &= o(1)\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
\sin\epsilon &= o(\epsilon^{\frac{1}{2}})\,, \quad \epsilon \to 0\,,\\
e^{\frac{2}{\epsilon}} &= o(e^{e^{\frac{1}{\epsilon}}})\,, \quad \epsilon \to 0\,.
\end{aligned}$$

1.2.1 Kombinasjonar av ordensrelasjonar

Følgjande relasjonar kan ein lett visa ved å bruka definisjonane på ordenssymbola.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\mathcal{O}(\phi)) &= \mathcal{O}(\phi)\,,\\
\mathcal{O}(o(\phi)) &= o(\mathcal{O}(\phi)) = o(o(\phi)) = o(\phi)\,,\\
\mathcal{O}(\phi)\mathcal{O}(\phi) &= \mathcal{O}(\phi\psi)\,,\\
\mathcal{O}(\phi)o(\psi) &= o(\phi)o(\psi) = o(\phi\psi)\,,\\
\mathcal{O}(\phi) + \mathcal{O}(\phi) &= \mathcal{O}(\phi) + o(\phi) = \mathcal{O}(\phi)\,,\\
o(\phi) + o(\phi) &= o(\phi)\,.
\end{aligned}$$

1.3 Asymptotiske følgjer, utvikling, og rekkjer

Lat følgja $\{\phi_n(\epsilon)\}$ $n = 1, 2, \ldots$ der $\phi_n(\epsilon)$ er funksjonar av ϵ vera gitt.

Definisjon IV: Asymptotisk følgje

Følgja $\{\phi_n(\epsilon)\}$ er ei asymptotisk følgje dersom for alle n, så er $\phi_{n+1}(\epsilon) = o(\phi_n(\epsilon)$ når $\epsilon \to \epsilon_0$.

MERKNAD: Dersom δ og N_δ knytt til ordensrelasjonen "o" ovanfor i samsvar med definisjonane, kan gjerast uavhengig av n, seier vi at den asymptotiske følgja er uniform i n. Tilsvarande seier ein at følgja er uniform i x dersom dei tilsvarande krava gjeld i høve til x.

Døme på asymptotiske følgjer:

$$\begin{aligned}
\phi_n(\epsilon) &= (\epsilon - \epsilon_0)^n \quad \text{når} \quad \epsilon \to \epsilon_0\\
\phi_n(\epsilon) &= e^{\epsilon}\epsilon^{-\lambda_n} \quad \text{når} \quad \epsilon \to \infty \quad \& \ \lambda_{n+1} > \lambda_n
\end{aligned}$$

1.3.1 Rekning med asymptotiske følgjer

Vi kan multiplisera saman to asymptotiske følgjer og på den måten finna ei ny asymptotisk følgje. Vi kan integrera ei asymptotisk følgje leddvis (m. o. p. ϵ). Til vanleg kan ein ikkje derivera ei asymptotisk følgje leddvis og som resultat få ei ny asymptotisk følgje. Jamfør det tilsvarande problemet ein har med Fourier-rekkjer.

Definisjon V: Asymptotisk utvikling

Ein sum av N ledd

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(x)\phi_n(\epsilon),$$

skal vi kalla ei asymptotisk utvikling av funksjonen $f(x,\epsilon)$ til N ledd dersom

$$f(x,\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} a_n(x)\phi_n(\epsilon) = o(\phi_N(\epsilon)) \quad \text{når} \quad \epsilon \to \epsilon_0\,, \tag{5}$$

og denne relasjonen gjeld stegvis $n = 1, 2, 3 \ldots N$.

For grensa $N \to \infty$ skal vi bruka notasjonen

$$f(x,\epsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\phi_n(\epsilon)\,. \tag{6}$$

Symbolet "$\sim$les vi gjerne som "asymptotisk lik". Ei asymptotisk utvikling er uniformt gyldig for eit område D i x, dersom desse relasjonane gjeld uniformt for $x \in D$.

1.3.2 Koeffisientane i ei asymptotisk utvikling

Koeffisientane i ei asymptotisk utvikling finn ein eintydig ved grenseprosessane

$$a_1(x) = \lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \frac{f(x,\epsilon)}{\phi_1(\epsilon)} \tag{7}$$

$$a_2(x) = \lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \frac{f(x,\epsilon) - a_1(x)\phi_1(\epsilon)}{\phi_2(\epsilon)} \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$a_N(x) = \lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \frac{f(x,\epsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n(x)\phi_n(\epsilon)}{\phi_N(\epsilon)} \tag{9}$$

Døme:

$$(x+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \prod_{k=1}^{n} |2k-3| \frac{\epsilon^{n-1}}{x^{(2n-1)/2}} \quad \epsilon \to 0\,,$$

med omsyn til følgja $\phi_n = \epsilon^{n-1}$. Merk at dette også er Taylor-utviklinga kring $\epsilon = 0$. Denne rekkja er konvergent for $|x| > \epsilon$, og ho er ikkje uniform i alle område der $x = 0$ er eit grensepunkt. Kontrollér resultatet!

1.3.3 Asymptotisk utvikling av integral

Dersom $f(x,\epsilon)$ er gitt som eit integral, får ein problem av ein annan type som må løysat ved hjelp av andre teknikkar. For eks. er delvis integrasjon gjerne eit nyttig verktøy for slike problem. Vi ser på eit døme (den komplementære feilfunksjonen):

$$\mathrm{erfc}(\epsilon) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\epsilon^\infty e^{-t^2} dt \,. \tag{10}$$

Vi skal finna ei asymptotisk utvikling av dette integralet for store ϵ. Først set vi $t^2 = \tau$ og finn

$$\mathrm{erfc}(\epsilon) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \,. \tag{11}$$

Etter ein delvis integrasjon finn ein

$$\mathrm{erfc}(\epsilon) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-\epsilon^2}}{\epsilon} - \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^\infty e^{-\tau} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \right] . \tag{12}$$

Dette resultatet peikar mot at det kan vere mogeleg å generera den asymptotiske rekkja etter aukande potensar i $\frac{1}{\epsilon}$ med stegvis delvis integrasjon. Ei slik rekkje vil vera av verdi for å evaluera $\mathrm{erf}(\epsilon)$ for store ϵ.

Vi held fram med å definera

$$F_n(\epsilon) \stackrel{def}{=} \int_\epsilon^\infty e^{-\tau} \tau^{-\frac{2n+1}{2}} d\tau \,, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \,. \tag{13}$$

Delvis integrasjon gir no

$$F_n(\epsilon) = \frac{e^{-\epsilon^2}}{\epsilon^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2} F_{n+1}(\epsilon) \,, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \,. \tag{14}$$

Denne rekursjonsformelen gir resultatet

$$\begin{aligned} F_0(\epsilon) \;=\; & e^{-\epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\epsilon^5} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^{n-1}\epsilon^{2n-1}} \right. \\ & \left. + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2^n} F_n(\epsilon) \right] \,, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Kontrollér resultatet!

Ein kan bruka definisjon av ei asymptotisk rekkje til å visa at representasjonen gitt i likn. (15) er ei asymptotisk rekkje. Gjer det som ei øving! Sjå elles Bush side 34 for alternativ utrekning.

Elles så merkar ein at det fort vert mykje reknearbeid med asymptotiske utviklingar. Det er også slik at det sjeldan er ferdige oppskrifter som kan brukast for eit aktuelt problem. Denne delen av matematikken er difor prega av å vera like mykje kunstsom "handtverk".

Avbrytingsregel Det er eit viktig problem å vita kvar ein skal bryta av ei asymptotisk rekkje. Sidan rekkja ikkje treng vere konvergent, har det til vanleg ingen meining å ta med for mange ledd. Ein vanleg avbrytings regel er:

Ein tek med ledd opp til det leddet som er minst. Dette leddet gir nemleg normalt eit mål for feilen.

2 Midlingsmetoden

Teorien presentert her er etter eit notat frå 1989.

2.1 Innleidande merknader

Vi skal først sjå på ein likningstype som kan overførast til standard form slik at midlingsmetoden kan brukast. Utgangspunktet er likninga

$$\ddot{x} + \epsilon h(x, \dot{x}) + x = 0\,, \tag{16}$$

Vi går over til faseplanet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, & (17)\\ \dot{y} &= -x - \epsilon h(x, y)\,, & (18) \end{aligned}$$

og innfører polarkoordinatar i faseplanet

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta \quad \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\ \dot{\theta}\,, & (19)\\ y = r\sin\theta \quad \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\ \dot{\theta}\,. & (20) \end{aligned}$$

Desse likningane kan også skrivast som

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\,, & (21)\\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\epsilon}{r} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,, & (22) \end{aligned}$$

eller

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta}{1 + \frac{\epsilon}{r} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta}\,. \tag{23}$$

Vi innfører nye variable

$$\alpha = \theta + t\,, \quad \dot{\alpha} = \dot{\theta} + 1\,, \tag{24}$$

og kan då skriva

$$\dot{r} = -\epsilon h\{r\cos(\alpha - t), r\sin(\alpha - t)\}\sin(\alpha - t)\,, \tag{25}$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\epsilon h}{r}\{r\cos(\alpha - t), r\sin(\alpha - t)\}\cos(\alpha - t)\,. \tag{26}$$

Både likning (23) og likningssystemet (25) og (26) er av typen

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{27}$$

der $\mathbf{x}$ er ein vektor

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

I tilfellet (23) har denne vektoren berre ein komponent (altså ein skalar), i tilfellet (25,26) har vektoren to komponentar (r, α). Merk også at vi ved transformasjonen frå (17,18) til (25,26) gjekk over frå eit autonomt til eit ikkjeautonomt system. Vi merkar oss spesielt at likninga (27) er eit ikkjeautonomt system.

Vi skal studera likningar av typen (27) ved hjelp av ein asymptotisk metode etter Boguliubov og Krylov [1].

2.2 MIDLINGSMETODEN

Midlingsmetoden tek sikte på å finna asymptotiske løysingar av system som varierer langsomt i ein variabel, samstundes som det kan vera raske"oscillasjonar i systemet. Likning (23) har ei form som viser at r varierer langsomt som funksjon av θ, medan h varierer rasktsom funksjon av θ over internvallet $(0, 2\pi)$. Det kan difor ha meining å leita etter ei løysing for $r(\theta)$, som i utgangspunktet er ein slags middel (over θ) av den eksakte løysinga.

Ser vi på systemet (25,26), så gjeld det same her, både r og α varierer langsamt som funksjon av t, medan komponentane i $\mathbf{F}$,

$$-h\{r\cos(\alpha - t), r\sin(\alpha - t)\}\sin(\alpha - t)\,, \tag{29}$$

og

$$-h\{r\cos(\alpha - t), r\sin(\alpha - t)\}\cos(\alpha - t)\,, \tag{30}$$

varierer raskt"med omsyn på t, slik at det er naturleg å leita etter ei løysing som startar med å finna ein slags midlare oppførsel av r og α som funksjonar av t. Etter metoden til Boguliubov og Krylov løyser vi likning (27) på følgjande måte:

Først fourierutviklar vi den periodiske funksjonen $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ i den varible t, svarande til dei raske"variasjonane (dette er ei formell fourirutvikling der $\mathbf{x}$ og t er å sjå på som uavhengige variablar).

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + \sum_{n\neq 0} \mathbf{F}_n(\mathbf{x})e^{int}\,. \tag{31}$$

Vidare definerer vi

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{in}\mathbf{F}_n(\mathbf{x})e^{int}\,. \tag{32}$$

Merk at

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \sum_{n\neq 0} \mathbf{F}_n(\mathbf{x})e^{int} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t) - \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) \tag{33}$$

Vi innfører symbolet $\underset{t}{M}\{\ \}$ som følgjande operasjon

$$\underset{t}{M}\{\mathbf{F}(\mathbf{x},t)\} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{x},t)dt = \mathbf{F}_0(\mathbf{x})\,, \tag{34}$$

(for $\underset{t}{M}\{\ \}$ les middelet over t av $\{\ \}$).

Vi definerer no ein implisitt transformasjon $\boldsymbol{\xi}(t)$ ved likninga

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \epsilon\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)\,, \tag{35}$$

og finn

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + \epsilon\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}\cdot\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \epsilon\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t}\,. \tag{36}$$

Innsett i likn. (27) fører dette til

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}\cdot\{\mathbf{I}+\epsilon\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial\boldsymbol{\xi}}\} &= -\epsilon\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t} + \epsilon\mathbf{F}\{\boldsymbol{\xi}+\epsilon\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)\}\\ &= \epsilon\{-\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,,\end{aligned}$$

her er $\mathbf{I}$ einingsmatrisa og vi finn vidare at

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} &= \epsilon\{-\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)\}\{\mathbf{I}+\epsilon\frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t}\}^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= \epsilon\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t) - \frac{\partial\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= \epsilon\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

I det siste steget er likn. (33) brukt, og dette steget viser kvifor det var tenleg å definera transformasjonen slik det vart gjort i likn. (35). Første tilnærming finn ein ved å løysa likninga

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \epsilon\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi}) = \epsilon\ \underset{t}{M}\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)\}\,, \tag{37}$$

altså den likninga vi får ved å ta den eksakte likninga og erstatta venstresida med den funksjonen som kjem fram ved å midla over t. Dette er grunnen til namnet midlingsmetoden. Vi har gått ut frå at $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi},t)$ er ein 2π- periodisk funksjon av t. Den forbetra første tilnærminga, som er korrekt til orden ϵ i asymptotisk meining, finn ein ved å ta denne løysinga for $\boldsymbol{\xi}$ og setja inn i

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \epsilon\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi},t)\,,$$

der $\mathbf{x}(t)$ no vert ein approksimasjon korrekt til orden ϵ.

Ein kan gå vidare med denne metoden og definera ein transformasjon som gir korrekt løysing til orden ϵ^2. Metoden kan i prinsippet løysa problemet til vilkårleg orden i ϵ. I praksis stoppar det gjerne opp fordi ein ikkje klarar å løysa dei differensiallikningane ein får fram eller fordi algebraen vert uhandterleg. Metoden er matematisk velfundert, men det vert det ikkje høve til å gå inn på her. For dei fleste praktiske føremål vil ein vera nøgd med å finna eit svar som er korrekt til orden ϵ.

2.3 Nokre eksempel

Eksempel 2.1 (Van der Pol si likning) *Finn ei tilnærma løysing for Van der Pol's likning*

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{38}$$

for små ϵ. Vi går over til polarkoordinatar og finn

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\,, & (39)\\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\epsilon}{r} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,, & (40) \end{aligned}$$

eller

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta}{1 + \frac{\epsilon}{r} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta}\,. \tag{41}$$

Vi tek for oss systemet (39) og (40) først og set $\theta = \alpha - t$ og $\dot{\theta} = \dot{\alpha} - 1$. Vi finn

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta = \dot{x}_1\,,\\ \dot{\alpha} &= -\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta = \dot{x}_2\,, \end{aligned}$$

der $x_1 = r$ og $x_2 = \alpha$, vidare er

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2\cos^2\theta - 1)r\sin\theta = (r^2\cos^2(\alpha - t) - 1)r\sin(\alpha - t)\,, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -h\sin\theta = -[r^2\cos^2(\alpha - t) - 1]r\sin^2(\alpha - t)\,,\\ F_2 &= -h\cos\theta = -[r^2\cos^2(\alpha - t) - 1]\sin(\alpha - t)\cos(\alpha - t)\,, \end{aligned}$$

$$\underset{t}{M}\{F_1\} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [r^2\cos^2(\alpha - t) - 1]r\sin^2(\alpha - t)dt\,,$$

merk at α og r er konstante i dette integralet. Ny varibel $\alpha - t = u$ gir

$$\begin{aligned} \underset{t}{M}\{F_1\} &= \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha - 2\pi} [r^2\cos^2 u - 1]r\sin^2 u du\\ &= \frac{1}{2}(r - \frac{1}{4}r^3)\,,\\ \underset{t}{M}\{F_2\} &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\epsilon}{2}\xi_1(1 - \frac{1}{4}\xi_1^2)\,,\\ \frac{d\xi_2}{dt} &= 0\,. \end{aligned}$$

Her er ξ_1 første tilnærming til r og ξ_2 er første tilnærming til α. Vi finn

$$\xi_1 = \frac{2}{[1-(1-\frac{4}{a_0^2})e^{-\epsilon t}]^{\frac{1}{2}}} \tag{43}$$

$$\xi_2 = konst. = \theta_0 \tag{44}$$

der $\xi_1(0) = a_0$. *For første tilnærming har vi:*

$$r = \xi_1\,, \tag{45}$$

$$\alpha = \theta_0 \quad \text{eller} \quad \theta = \theta_1 = \theta_0 - t\,. \tag{46}$$

Første forbetra tilnærming finn vi som

$$r = r_1 = \xi_1 + \tilde{F}_r(\xi_1, \theta_0, t)\,, \qquad \alpha = \alpha_1 = \theta_0 + \tilde{F}_\theta(\xi_1, \theta_0, t)\,. \tag{47}$$

$$F_1 = F_r(r,\alpha,t) = F_{r0}(r,\alpha) + \sum_{n\neq 0}\{P_n(r,\alpha)\cos nt + Q_n(r,\alpha)\sin nt\}\,, \tag{48}$$

$$\tilde{F}_r(r,\alpha,t) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\{P_n(r,\alpha)\sin nt - Q_n(r,\alpha)\cos nt\}\,, \tag{49}$$

$$F_2 = F_\theta(r,\alpha,t) = F_{\theta 0}(r,\alpha) + \sum_{n\neq 0}\{P_n^*(r,\alpha)\cos nt + Q_n^*(r,\alpha)\sin nt\}\,, \tag{50}$$

$$\tilde{F}_\theta(r,\alpha,t) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\{P_n^*(r,\alpha)\sin nt - Q_n^*(r,\alpha)\cos nt\}\,. \tag{51}$$

Legg merke til at koeffisientane til dei høgare harmoniske i $\tilde{F}_r$ *og* $\tilde{F}_\theta$ *blir numerisk små p.g.a. faktoren* $\frac{1}{n}$.

Dersom vi løyser likning(41) til orden ϵ *i staden for likningsystemet (39,40), så har vi berre ei skalar likning til orden* ϵ.

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon(r^2\cos^2\theta - 1)r\sin^2\theta \tag{52}$$

$$\frac{d\xi_1}{d\theta} = \epsilon \underset{\theta}{M}\{r^2\cos^2\theta - 1)r\sin^2\theta\}|_{r=\xi_1} \tag{53}$$

$$= \frac{\epsilon}{2}\xi_1(1-\frac{1}{4}\xi_1^2) \tag{54}$$

$$\xi_1(\theta) = \frac{2}{\{1-(1-\frac{4}{a_0^2})e^{-\epsilon\theta}\}^{\frac{1}{2}}} \tag{55}$$

der $\xi_1(0) = a_0$.

Vi kunne også funne dette frå den andre løysinga sidan $t = \theta_0 - \theta$

$$\xi_1(\theta_0 - \theta) = \frac{2}{\{1-(1-\frac{4}{a_0^2})e^{-\epsilon(\theta_0-\theta}\}^{\frac{1}{2}}} \tag{56}$$

der $\xi_1(0) = a_0$ *d.v.s.* $\theta = \theta_0$. *Vi innfører* $u = \theta - \theta_0$ *og finn*

$$\xi_1(u) = \frac{2}{\{1 - (1 - \frac{4}{a_0^2})e^{-\epsilon u}\}^{\frac{1}{2}}} \tag{57}$$

Eksempel 2.2 (Faseplans-trajektorien) *Finn ei tilnærma løysing for faseplans-trajektorien for likninga*

$$\ddot{x} + \epsilon(|\dot{x}| - 1)\dot{x} + x = 0\,. \tag{58}$$

Vi finn

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\,, & (59)\\ \dot{\theta} &= -1 - \epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,, & (60) \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{M}\{h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\} &= \underset{\theta}{M}\{(r|\sin\theta| - 1)r\sin^2\theta\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(r\sin\theta - 1)rsin^2\theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-r\sin\theta - 1)rsin^2\theta d\theta \end{aligned}$$

substitusjon $\theta = \pi + u$ *i siste integralet viser at dei to integrala er like og vi får*

$$\begin{aligned} \underset{\theta}{M}\{h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(r\sin\theta - 1)rsin^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}(\frac{4}{3}r^2 - \frac{\pi}{2}r)\,. \end{aligned}$$

Likninga for første tilnæring vert

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\theta} &= \frac{\epsilon}{\pi}\{\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{\pi}{2}\xi\}\,, \\ \frac{d\xi}{d\theta} &= 0 \quad \text{for} \quad \xi = \frac{3}{8}\pi = \xi^* \quad (\text{limitsyklus})\,, \\ \frac{d\xi}{d\theta} &= \frac{4\epsilon\xi}{3\pi}(\xi - \xi^*)\,, \end{aligned}$$

denne likninga er separabel og vi finn $\xi = \xi(\theta)$ *som første tilnærming. (Sjå Smith & Jones side 110). Den forbetra første tilnærminga finn ein så ved å ta* ξ *ovafor og substituera i likninga*

$$x(\theta) = \xi(\theta) + \epsilon\tilde{F}(\xi,\theta)\,, \tag{62}$$

der

$$\begin{aligned} F(x,\theta) &= F_0(x) + \sum_{n\neq 0} F_n e^{in\theta} & (63)\\ \tilde{F}(x,\theta) &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} F_n e^{in\theta}\,. & (64) \end{aligned}$$

I vårt tilfelle har vi

$$F(x,\theta) \equiv (x|\sin\theta| - 1)x\sin^2\theta\,. \tag{65}$$

Eksempel 2.3 (Den omsnudde pendelen) *Denne har likninga*

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\epsilon\alpha\frac{d\theta}{d\tau} - (k^2\epsilon^2 - \epsilon\sin\tau)\theta = 0\,. \tag{66}$$

Vi vel nye variable

$$\begin{aligned} \theta &= \phi + \epsilon\sin\tau\,\phi & (67)\\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \epsilon\Omega + \epsilon\cos\tau\,\phi\,. & (68) \end{aligned}$$

Vi deriverer (67) og set inn i (68), resultatet kan skrivast som

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon\Omega}{1+\epsilon\sin\tau}\,. \tag{69}$$

Vi deriverer (68) og set inn i (66), resultatet kan skrivast som

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \epsilon\dot{\Omega} - \epsilon\sin\tau\,\phi + \epsilon\cos\tau\,\dot{\phi}\\ &= -2\epsilon\alpha(\epsilon\Omega + \epsilon\cos\tau\,\phi) + (k^2\epsilon^2 - \epsilon\sin\tau)(\phi + \epsilon\sin\tau\,\phi)\\ &= -2\epsilon^2\alpha\Omega - 2\epsilon^2\alpha\phi\cos\tau + (k^2\epsilon^2 - \epsilon\sin\tau)\phi + \epsilon\sin\tau(k^2\epsilon^2 - \epsilon\sin\tau)\phi\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\dot{\Omega} + \epsilon\cos\tau\dot{\phi} &= -2\epsilon^2\alpha\Omega - 2\epsilon\alpha\phi\cos\tau + k^2\epsilon^2\phi\\ &\quad +\epsilon^3k^2\phi\sin\tau - \epsilon^2\sin^2\tau\,\phi\,, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= -\dot{\phi}\cos\tau - 2\epsilon\alpha\Omega - 2\epsilon\alpha\phi\cos\tau + k^2\epsilon^2\phi\\ &\quad k^2\epsilon^2\phi\sin\tau - \epsilon^2\sin^2\tau\,\phi\,. \end{aligned}$$

Alt ialt har vi då

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon\Omega}{1+\epsilon\sin\tau} = \epsilon\Omega - \epsilon^2\Omega\sin\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,. \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} = & - \epsilon\Omega\cos\tau - \epsilon^2\Omega^2\sin\tau\cos\tau \\ & - 2\epsilon\alpha\Omega - 2\epsilon\alpha\phi\cos\tau + k^2\epsilon\phi\sin\tau \\ & + k^2\epsilon\phi - \epsilon\sin^2\tau\,\phi + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,.\end{aligned}$$

Likningane er no på ei slik form at midlingsmetoden kan nyttast. Dei midla likningane er:

$$\dot{\phi} = \epsilon\Omega\,, \tag{71}$$

$$\dot{\Omega} = -2\epsilon\alpha\Omega + k^2\epsilon\phi - \frac{1}{2}\epsilon\phi\,, \tag{72}$$

eller

$$\ddot{\phi} + 2\epsilon\alpha\dot{\phi} + \epsilon^2(\frac{1}{2} - k^2)\phi = 0\,. \tag{73}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$r^2 + 2\epsilon\alpha r + \epsilon^2(\frac{1}{2} - k^2) = 0\,, \tag{74}$$

som har røtene

$$r = -\epsilon\alpha \pm \sqrt{\epsilon^2\alpha^2 - \epsilon^2(\frac{1}{2} - k^2))}\,. \tag{75}$$

Vi merkar oss at for $\alpha = 0$, så har vi stabile løysingar for $k^2 < \frac{1}{2}$. Dette er i samsvar med resultat vi fann tidlegare.

3 Dynamiske system

3.1 Introduksjon

Fenomen som utviklar seg over tid vert gjerne modellert v. h. a. differensiallikningar, eller system av slike likningar. Klassiske eksempel er jorda si rørsle rundt sola og dei andre planetrørslene med månar, metorar o. s. b. Ander døme er evolusjonen av bio-økologiske system. I det heile er evolusjonen av fenomen i fysikk, biologi, økonomi, ressursforvalting o. s. b. gjerne modellerte v. h. a. differensiallikningar. Ein skil gjerne mellom ordinære (odl) og partielle (pdl) differensiallikningar. Vi skal her avgrensa oss til odl.

Her skil ein gjerne mellom *lineære* og *ikkje lineære* likningar. Dei lineære likningane er alt i nokon mon studerte i M 117 slik at vi skal her stort sett samla oss om ikkje lineære system. Eit anna skilje går mellom det ein kallar *autonome* og *ikkje-autonome* system. Det vil seia system som ikkje eksplisitt er avhengige av tida som variabel, og dei systema som er eksplisitt tidsavhengige.

3.2 Generelle system, faserom

Vi skal formelt skriva likningane for slike system som

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\,, \quad \dot{\mathbf{x}} \stackrel{def}{=} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\,, \tag{76}$$

og dersom tida t ikkje er eksplisitt med i venstresida i denne likninga, så er systemet *autonomt* og då har ein

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \tag{77}$$

elles kallar ein systemet *ikkje-autonomt*.

Her er $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}^{\mathrm{t}}$ ein vektor av vilkårleg lengde n. Teorien for løysing av slike system er godt utvikla og ein har eksistens og eintyde teorem som garanterer ei eintydig løysing av start-verdi problemet for slike system under gitte vilkår. Provet for dette er gitt i Appendix A , men berre for det ein-dimensjonale tilfellet. Provet for det n-dimensjonale tilfellet følgjer same metoden og er ei rimeleg enkel generalisering. Ein merkar seg at kravet som vert stilt til funksjonen eller operatoren $\mathbf{X}$ er det som gjerne vert kalla Lipschitz-kravet[1].

Dette er eit krav som er noko svakare enn at $\mathbf{X}$ skal kunna deriverast. Vi seier gjerne at $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}^{\mathrm{t}}$, der $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ representerer ein løysings trajektorie i det n-dimensjonale faseromet med startpunkt i $\mathbf{x}_0$. Vektoren $\mathbf{x}(t)$ vil representere tilstanden for systemet ved det aktuelle tidspunktet t samstundes som t er parameteren for kurve-representasjonen (trajektorien) av løysinga. I høve til denne trajektorien veit vi frå teorien for romkurver (generalisert til det n-dimensjonale tilfellet) at $\dot{\mathbf{x}}(t)$ kan tolkast som ein tangentvektor til denne kurva. Tilstands-vektoren vil såleis flytta seg etter som tida går, langs banen (trajektorien) som er løysingskurva. Teorien for løysingar av startverde problemet for slike system fortel oss også at gjennom kvart *regulært punkt* i faseromet går der ei og berre ei løysingskurve (eintyde-teoremet). Med *regulært punkt* meiner ein då punkt der krava til eksistens og eintyde er oppfylt. Dette

[1] Lipschitz-kravet: $\exists A$ slik at $|\mathbf{X}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_2)| \leq A|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, der A er ein konstant.

at banar (trajektoriar) i faseromet ikkje kan kryssa kvarandre i regulære punkt, er ein fundamental eigenskap ved slike system.

Dessutan har ein spesielt for autonome system at ein kan velja startpunktet på ein bane (trajektorie) kvar ein vil og det vil eintydig bestemma heile banen. Ofte talar ein også om halv-banar d.v.s. banar som har eit startpunkt, t. d. $\mathbf{x}_0$, og som går frå dette startpunktet framover med tida (eller bakover). For å vere heilt presis talar ein gjerne om ein *positiv halvbane* i dette tilfellet. Tida går i positiv retning. I prinsippet kunne ein frå det gitte startpunktet, $\mathbf{x}_0$, også la tida gå "bakover", i negativ retning. I så fall er det tale om ein *negativ halvbane*.

Elles kan i prinsippet alle system gjerast autonome ved eit kunstgrep. Nemleg ved å utvida dimensjonen på systemet med ein og la tida bli ein ny koordinat x_{n+1} der $\dot{x}_{n+1} = 1$. Prisen for dette er altså å auka dimensjonen på systemet. Dette gjer systemet meir komplisert slik at det gjerne ikkje vert noko enklare å løysa dette systemet enn det ein hadde i utgangspunktet når det gjeld konkrete løysingar. Men for generelle teoretiske drøftinga av slike system kan det vere ei forenkling.

3.2.1 Eksistens og eintyde

Vi har følgjande teorem når det gjeld løysing av startverdi-problemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\,, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{78}$$

der $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ er n-dimensjonale vektorfunksjonar og $\mathbf{x}_0$ er ein gitt vektor som er startkravet. Lat $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ vere kontinuerleg på $\bar{G} \times I$, der $I = [t_0,\, t_0 + T]$ og G er open og avgrensa i $\mathbb{R}^n$, slik at $\bar{G}$ er kompakt[2] . Vi seier at $\mathbf{x}(t)$ er ei løysing av likn. (78) når ein finn ein $\mathbf{x}(t)$ som har kontinuerleg derivert i eit tidsintervall og slik at $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Vi har då følgjande teorem.

Teorem 3.1 (Eksistens) *Dersom $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ er kontinuerleg på $\bar{G} \times I$ der $I = [t_0,\, t_0 + T]$ og G er open og avgerensa i $\mathbb{R}^n$, så vil for $\forall\, \mathbf{x}_0 \in G\,, \quad \exists\, \mathbf{x}(t)$ som kan deriverst slik at likn. (78) er oppfylt i eit intervall $t \in [t_0,\, t_0 + h]$ der $h \stackrel{def}{=} \inf(T,\, \frac{d}{M})$ med $M = \sup_{\mathbf{x}\in\bar{G},\, t\in I} ||\mathbf{X}||$ og $d = \mathrm{dist}(\mathbf{x}_0, G^*)$ er avstanden frå $\mathbf{x}_0$ til randa av $\bar{G}$ som er $G^* \stackrel{def}{=} \bar{G} - G$.*

Teorem 3.2 (Eintyde) *Dersom $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ også stettar Lipschitz kravet:*

$$\|\mathbf{X}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_2, t)\| \le k\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|\,, \quad \forall\, \mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2 \in \bar{G}\,, \quad t \in I\,,$$

så er løysinga i Teorem 3.1 eintydig .

Her er k ein konstant som gjerne vert kalla Lipschitz-konstanten. Neste teorem seier noko om korleis løysingar i dei føregåande teorema 3.1 og 3.2, kan avhenge av ein parameter-vektor. Gitt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})\,, \qquad \mathbf{x}(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_0(\mathbf{y}) \tag{79}$$

der $\mathbf{y}$ er ein parameter-vektor av dimensjon p.

[2] $\bar{G}$ tyder her tillukkinga av den opne mengda G

Teorem 3.3 (Parameter) *Lat* $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ *vere kontinuerleg på:*

$$\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \bar{G}\} \times \{\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \bar{K}\} \times \{t : t \in [t_0,\, t_0 + T]\}$$

der $G \in \mathbb{R}^n$ *og* $K \in \mathbb{R}^m$ *er opne og avgrensa rom, der* m *0g* n *er vilkårlege og bestemte av problemet. Dersom det finst ein konstant* k *slik at*

$$||\mathbf{X}(\mathbf{x}_1, t, \mathbf{y}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_2, t, \mathbf{y})|| \leq k||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||\,, \quad \forall\, \mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2 \in \bar{G}, \quad \mathbf{y} \in \bar{K},\ t \in I\,,$$

då finst det ei løysing av likn. (79) som er kontinuerleg m.o.p. parametervektoren $\mathbf{y}$

Merk også: Under same føresetnader er løysinga $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ein kontinuerleg funksjon m.o.p. t_0, $\mathbf{x}_0$. Dette følgjer av provet for eksistens og eintyde (vi har gjennomført dette provet i Appendiks A, men berre for det ein-dimensonale tilfellet. Provet for det generelle tilfellet kan førast på same måten utan vesentlege komplikasjonar ved å innføra ein høveleg norm og avstand i det n-dimensjonale rommet).

Elles er prova for teoremet 3.3 og følgjande teorem 3.4 og 3.5, uteletne, då det fell utan for ramma av dette emnet (M214). Interesserte kan finna detaljar om dette i standard litteratur om emnet t. d. [4] og [5].

Neste spørsmål er: Når kan eventuelle løysingar deriverast m.o.p startkrava. Svaret finn ein i neste teorem:

Teorem 3.4 (Startkrav) *Gitt systemet*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,,\ \mathbf{x} \in \bar{G} \in R^n\,, \quad t \in [t_0,\, t_0 + T] \tag{80}$$

der $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ *er kontinuerleg i* $\mathbf{x}$ *og* t *og* $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}$ *finst og er kontinuerleg. Då finst det ei løysing* $\mathbf{x}(t)$ *på intervallet* $[t_0,\, t_0 + h]$ *som har kontinuerleg førstederivert m.o.p.* $\mathbf{x}_0$*, der* $h \stackrel{def}{=} \inf(T,\, \frac{d}{M})$ *med*

$$M \stackrel{def}{=} \sup_{\bar{G} \times I} ||\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)||\,, \quad d \stackrel{def}{=} \operatorname{dist}(\mathbf{x}_0,\, G^*)$$

Merk at det kravet som er stilt i dette teoremet, $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}$ finst og er kontinuerleg, er strengare enn Lipschitz-kravet. Neste teorem fortel om korleis løysinga kan utvidast i tid.

Teorem 3.5 (Utviding) *(1) Gitt systemet*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{81}$$

Lat $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ *vere ein kontinuerleg Lipschitz-funksjon i* $\bar{G} \times [t_0,\, t_0 + T]$*. Dersom* $T \to \infty$ *og* $\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$*, der* $\mathbf{c}$ *er ein konstant vektor, så er* $\mathbf{X}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$

(2) Gitt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{82}$$

Lat $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ *vere ein kontinuerleg Lipschitz-funksjon for kvar* $\mathbf{x},\ t \geq 0$*. Då har ein to tilfelle:*

(a) Det finst ei løysing $\mathbf{x}(t)$ *for* $t \in [t_0, +\infty]$
eller

(b) Det finst ein $T < \infty$ *slik at løysinga* $\mathbf{x}(t)$ *er definert for* $t \in [t_0, T]$ *og* $||\mathbf{x}(t)|| \to \infty$ *når* $t \to T$

3.3 Væske-bilete

Slik problemet vårt er formulert i likn. (76), har ein at $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ er ein tangentvektor til løysingskurvene. Desse løysingskurvene kan ein og sjå på som feltlinene til vektorfeltet $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. Definisjons-likninga for feltlinene til vektorfeltet $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ er nemleg

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\,. \tag{83}$$

Altså dei kurvene som er slik at tangentvektoren er parallell med $\mathbf{X}$ i kvart punkt. Det å løysa dette feltline problemet er difor analogt med å løysa likn. (76) for vilkårlege startkrav. For det ikkje-autonome tilfellet må ein tenkja seg desse feltlinene gitt for ein fast verdi av t. Det kan difor her vera tenleg å sjå på det generelle autonome systemet, der biletet av feltlinene ligg fast. I prinsippet går det ei feltline gjennom kvart punkt i løysingsromet, som er alle punkt i $\mathbf{x}$ -rommet, der det går ei mogeleg løysingskurve. Denne kurvefamilien av feltliner kan ein sjå på som anlogt til straumlinene i ei væske. I hydrodynamikken (M 242) skil ein mellom stasjonære og ikkje-stasjonære system som i vårt tilfelle svarar til autonome og ikkje-autonome system. I analogi med hydrodynamikken kan ein sjå på eit kontinuum av rørsler i faseromet, på den måten at ein startar ut "mangesystem samstundes med eit kontinuum av startverde $\mathbf{x}_0$. På den måten kan ein sjå på dette som ei "væskesom strøymer, *fasevæska*. Løysingskurvene eller banane kan ein då sjå på som *straumliner* i denne fasevæska.

Tenkjer vi oss så eit lite volumelement i denne væska som flytter seg, så vil kvart punkt i dette volumelementet følgja sin bestemte bane. Volum-elemetet etter eit visst tidsrom kan ein difor sjå på som ei avbilding eller transformasjon i tid. Denne transformasjonen er styrt av dei dynamiske likningane. Generelt veit ein frå teorien om integral (M 112) at slike avbildingar følgjer transformasjonslova

$$dV(t) = J dV(0) \tag{84}$$

der J er determinanten til Jacobi-matrisa (dyaden) $\mathbf{J}$ med element J_{ij} og

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i(t, \mathbf{x}_0)}{\partial x_{0j}}\,, \quad \text{der} \quad x_{0j} \stackrel{def}{=} x_j(0, \mathbf{x}_0)\,. \tag{85}$$

Vi ser på eit volumelementet som flytter seg i eit lite tidsrom Δt, slik at

$$\mathbf{x}(\Delta t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0)_{t=0}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathbf{x}(\Delta t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \\ &= \mathbf{I} + \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0)_{t=0}}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)_{t=0}}{\partial \mathbf{x}_0} \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2)\,.$$

Vi finn då Jacobi-determinanten

$$J = \det \mathbf{J} = 1 + \Delta t \, \nabla \cdot \mathbf{X} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \tag{86}$$

der $\nabla \cdot \mathbf{X}$ er[3] evaluert for $t = 0$. Merk at start-tidspunktet er vilkårleg valt. Vidare finn ein at

$$\frac{dV(\Delta t) - dV(0)}{dV(0)\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{X} + \mathcal{O}(\Delta t)\,, \tag{87}$$

slik at den relative vekstraten for volumelementet blir

$$\frac{1}{dV}\frac{d}{dt} dV = \nabla \cdot \mathbf{X}\,, \tag{88}$$

der $\nabla \cdot \mathbf{X}$ er evaluert i startpunktet. Etter likn. (76) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}$, kan $\mathbf{X}$ tolkast som fartsvektoren til det fase-volumelementet vi ser på. Likn. (88) vert då analog til det ein har i hydrodynamikk for eit materielt volumelement. Men i hydrodynamikk er det naturlegvis tale om eit tredimensjonalt "volum", medan det i vår samanheng kan vera eit rom ("volum") av vilkårleg dimensjon.

3.4 Konservative, dissipative system

Eit dynamisk system kan vera *konservativt* eller *dissipativt* avhengig av om "energien"i systemet er bevart eller ikkje. Vanlegvis er det *dissipative* prosessar som friksjon, varmeleiing og viskositet i eit system, og dette fører til det vi kallar eit *dissipativt* system. Dersom dette ikkje er tilfelle, har ein eit *konservativt* system. Ut frå det vi nett fann, er det no lett å klassifisera dynamiske system ut frå kriteriet

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = 0\,, \tag{89}$$

gir eit konservativt system og

$$\nabla \cdot \mathbf{X} < 0\,, \tag{90}$$

gir eit dissipativt system. I prinsippet kunne ein også tenkja seg system der ein snudde ulikskapen i den siste likninga. Ein ville i dette tilfelle få eit system som vart tilført energi, og det er også praktisk mogeleg gjennom å "drivesystem med ei tidsavhengig "kraft".

3.4.1 Hamiltonsk system

Ein viktig underklasse av dynamiske system er såkalla Hamiltonske system, der likningane som styrer systemet har følgjande struktur:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \tag{91}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \tag{92}$$

[3]Her refererer ∇ operatoren til det n-dimensjonale $\mathbf{x}$-rommet.

der q_i og p_i er generaliserte koordinatar og impulskoordinatar. Hamilton funksjonen $H = H(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ er i utgangspunktet gitt. I visse tilfelle er denne knytt til energien i systemet, men ikkje alltid. Meir om dette finn du i M 142.

Vi innfører ei $2n \times 2n$ antisymmetrisk blokk-matrise

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{93}$$

der $\mathbf{0}$ er ei $n \times n$ null matrisa og $\mathbf{I}$ er ei $n \times n$ einings matrise. Vidare brukar vi vektor notasjonen

$$\mathbf{x} = \{q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\}^t \,, \tag{94}$$

som er ein søylevektor. Ein kan då skriva dette systemet på komprimert form som [4]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \cdot \nabla H \,. \tag{95}$$

Elles er det lett å visa at $\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ der ∇ operatoren no refererer til det to-n dimensjonale romet definert ved $\mathbf{x}$-vektoren (likn. (94)). Resultatet følgjer rett fram ved å bruka Hamilton sine likningar (91) og (92). Dette viser at

$$\nabla \cdot (\mathbf{R} \cdot \nabla H) = 0 \,,$$

det Hamiltonske systemet er difor alltid konservativt.

Eksempel 3.1 (Lukka banar) *Vi ser på eit to-dimensjonalt problem og antar at det eksisterer løysingskurver som er lukka banar. Vi ser på ein slik lukka bane og brukar Gauss sin integralsats i planet*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} ds = \int \int_S \nabla \cdot \mathbf{X} dx dy \,, \tag{96}$$

der ∂S er den lukka banen og $\mathbf{n}$ er ein einingsnormal til banen slik at $\mathbf{X} \cdot \mathbf{n} = 0$ langs banen. Vi har difor at venstre sida i likn. (96) er null, og det krev at høgre sida også må vera null. Difor kan ein ikkje ha lukka banar for ikkje-konservative systemet der $\nabla \cdot \mathbf{X}$ har eit fast forteikn.

Det følgjande er eit sentralt teorem om lukka banar i to dimensjonar.

Teorem 3.6 (Poincaré - Bendixson) *Lat D vere eit lukka avgrensa område i $\mathbb{R}^2$, som ikkje innheld singulære punkt for systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, som er eit 2×2 system. Dersom det finst ein positiv halvbane $\mathcal{H}$ som har alle punkt i D, då har ein tre moglege tilfelle:*

(1) $\mathcal{H}$ er ein lukka bane.

(2) $\mathcal{H}$ nærmar seg ein lukka bane.

(3) $\mathcal{H}$ nærmar seg eit likevekts punkt (dette er i grunnen eit særtilfelle av (2), sidan ein kan sjå på eit likevektspunkt som eit degenerert tilfelle av ein lukka bane).

Provet for dette teoremet tek vi ikke med her, men det kan ein finna t.d. Struble [6] side 182.

[4] Dette vert gjerne kalla *symplectic* notasjon. Sjå t.d. Goldstein: Classical Mechanics s. 347

3.5 Likevekt og stabilitet

I eit dynamisk system har ein definisjonsmessig likevekt dersom $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ for alle t. Med andre ord: Likevektspunkta er dei punkta som gir $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ for eit autonomt system. I dette tilfellet referer likevekt til visse punkt i faseromet som har den eigenskapen at dersom systemet er i eitt av desse punkta, så vert systemet verande der fordi den deriverte av alle "koordinataneer null.

Ein annan type likevekt har ein t.d. i jorda sin bane rundt sola. I dette tilfellet har ein ikkje ein likevekt-situasjon som den vi først nemnde. Likevel har systemet ei slags jamvekt på den måten at systemet gjentar seg sjølv periodisk. Vi har ein lukka bane som etter eitt år startar på nytt. Det er rimeleg å stilla spørsmål om stabilitet i båe desse tilfella, men det er så ulike fenomen at det krevst ulike stabilitets omgrep for å fanga opp det ein er interessert i å vita om systemet.

For det tredje kan ein tenkje seg ei *rørsle*, løysingskurve for likn. (76) som startar i $\mathbf{x}_0$. Kva skjer om ein startar *rørsla* nær $\mathbf{x}_0$? Vil ein då få ei *rørsle* som alltid ligg nær den første. Liapunov har gitt namnet til den stabilitets definisonen som tek opp dette problemet. Eit fjerde stabilitetsomgrep er frå Laplace. All rørsle som er avgrensa d. v. s. $|\mathbf{x}(t)| < \infty \quad \forall\, t$ er stabil.

3.5.1 Stabilitet av likevekt

For å undersøkja om ein gitt likevekt, $\mathbf{x}_L$, er stabil eller ikkje, så ser ein på kva som skjer om ein startar ei *rørsle* nær $\mathbf{x}_L$. Lat startpunktet for den rørsla vi ser på vere $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_L + \delta\mathbf{x}$ og lat $\mathbf{x} = \mathbf{x}_L + \boldsymbol{\xi}$ der rørsla er styrt av likn. (77) (vi ser på autonome system). Vi substituerer for x i denne likninga og finn

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_L + \boldsymbol{\xi})\,. \tag{97}$$

I dei fleste tilfelle er det uråd å løysa dette problemet analytisk fordi operatoren $\mathbf{X}$ er ikkje-lineær. For å koma nokon veg må ein nøya seg med tilnærma løysingar som ein finn ved å linearisera denne likninga. Reint praktisk betyr det at vi rekkje-utviklar høgresida i likninga om likevektspunktet, $\mathbf{x}_L$, (Taylor utvikling) om eit likevektspunkt, $\mathbf{x}_L$, og finn

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_L) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\mathbf{X}(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\xi}|^2)\,. \tag{98}$$

eller sidan $\mathbf{X}(\mathbf{x}_L) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}_L$ er eit likevektspunkt), så får ein til leidande orden

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\mathbf{X}(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L}\,, \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \delta\mathbf{x}\,, \tag{99}$$

som er eit lineært problem av den typen ein kjenner frå M 117. Vi berre repeterer resultata: Det er eigen-verdiane λ_n til matrisa $\nabla\mathbf{X}(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L}$ som er avgjerande for stabilitet. Dersom det finst n ulike eigen-verdiar λ_n og realdelen, $\Re(\lambda_n) \leq 0$ for alle n, så er systemet stabilt, elles er det ustabilt (samanfallande eigen-verdiar må drøftast særskilt). Dette problemet vert drøfta meir detaljert under pkt. **3.5.2** for det spesielle tilfellet at vi har eit to-dimensjonalt system.

Merk at for lineære system er dette samanfallande både med Laplace sin definisjon av stabilitet og Liapunov sin definisjon som vi straks skal koma til. Men det er mest naturleg å sjå på dette som eit særtilfelle av Liapunov-stabilitet. Sjå avsnitt (**3.7**)

Eksempel 3.2 (Pendel-likninga) *Pendellikninga kan skrivast som*

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \tag{100}$$

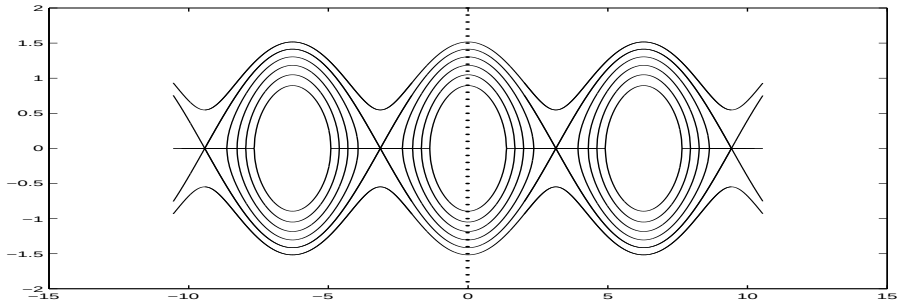
Når vi innfører $x = \theta$ *og* $y = \dot{\theta}$*, kan denne likninga skrivast som eit system*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin x \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Vi har opplagt likevekts-punkt i $y = 0, \quad x = n\,\pi$ *der* $n = 0, 1, \ldots$ *Vi ser på likevektspunktet* $(0, 0)$ *og linarisererd Det gir*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{102}$$

der matrisa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ *har eigenverdiar* $\lambda_\pm = \pm i\omega$*, og systemet er som venta stabilt.*



Figur 1: *Faseplans plot av pendellikninga. Den horisontale aksen er* θ *og den vertikale er* $\dot{\theta}$*).*

3.5.2 Klassifisering av likevekt i to dimensjonar

For to-dimensjonale system kan likn. (99) skrivast som

$$\dot{x} = ax + by\,,$$
$$\dot{y} = cx + dy\,.$$

der $\boldsymbol{\xi} \stackrel{def}{=} \{x, y\}^{\mathrm{t}}$ og matrisa

$$\nabla\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{def}}{=} \mathbf{A} \tag{103}$$

Dette er eit enkelt lineært system av føste ordens ordinære differensial-likningar. Den vanlege framgangsmåten er å gå ut frå at løysingane kan skrivast som

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0\, e^{\lambda t}\,.$$