der $\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \{x, y\}^{\mathrm{t}}$ og $\mathbf{x}_0$ er startverdien for $\mathbf{x}$. Vi finn då at

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda\, \mathbf{x}$$

slik at dette systemet av differensiallikningar kan reduserast til eit algebraisk problem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \tag{104}$$

altså eit eigenverdi-problem for matrisa $\mathbf{A}$. Løysingane vil då få eigenskapar som er knytte til om eigen-verdiane er positive eller negative, om dei er komplekse eller reelle og kva forteikn realdelen i såfall har. Generelt vil løysingane ha følgjande form:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{e} e^{\alpha t + i\beta t} + c_2 \mathbf{e}^* e^{\alpha t - i\beta t} \tag{105}$$

der c_1 og c_2 er integrasjons-konstantar, $\mathbf{e}$ er eigenvektoren svarande til eigenverdien $\lambda = \alpha + i\beta$ og $\mathbf{e}^*$ er den komleks konjungerte til $\mathbf{e}$. Merk at for at løysinga skal bli reell når λ er kompleks, så må $c_2 = c_1^*$. Generellt har ein at ein kompleks eigenverdi medfører at også den kompleks-konjungete av denne eigenverdien er ein eigenverdi, sidan matrisa $\mathbf{A}$ er reell. Det som bestemmer stabiliteten er forteiknet på α. For det komplekse tilfellet ser ein at den er den same for båe eigen-verdiane. For tilfellet med reelle eigenverdiar kan forteiknet vere ulikt for dei to røtene. Som før nemnt har ein generelt dette resultatet:

Dersom det finst ein eigenverdi som er positiv eller har positiv realdel, så er systemet ustabilt, elles er det stabilt. Dette svarar til at ein ser på løysingar som er avgrensa (stabile) og dei som ikkje er det (ustabile). Som vi skal sjå litt seinare, er dette i samsvar både med Laplace sin definison og Liapunov sin definisjon på stabilitet.

Eigenverdi-likninga er determinanten

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0\,. \tag{106}$$

Lat $2p \stackrel{def}{=} (a+d)$ og $q \stackrel{def}{=} \det(\mathbf{A}) = ad - bc$, slik at eigenverdi-likninga kan skrivast som $\lambda^2 - 2p\lambda + q = 0$. Vi har då røtene i denne likninga

$$\lambda_\pm = p \pm \sqrt{\Delta}\,, \tag{107}$$

der $\Delta \stackrel{def}{=} p^2 - q$, denne vert også kalla diskriminanten for systemet. Det er denne som skil mellom dei ulike typane løysingar. Vi har $\Delta < 0$ gir komplekse løysingar, $\Delta = 0$ gir samanfallande reelle røter med tiløyrande polynom løysing og $\Delta > 0$ gir to reelle røter. Når røtene er komplekse er stabiliteten bestemt av forteiknet på p. Når røtene er reelle er det meir komplisert.

Tilfellet $\Delta > 0,\ \ q > 0$

Lat eigenvektoren $\mathbf{e} \stackrel{def}{=} \{r, s\}^{\mathrm{t}}$. Når $\lambda = \lambda_+$ har ein desse likningane for r og s:

$$\begin{aligned} (a - \lambda_+)r + bs &= 0\,, \\ cr + (d - \lambda_+)s &= 0\,. \end{aligned}$$

Då determinanten til dette likning-systemet er null, er likningane avhengige og vi kan t. d. velja $r = r+$ fritt og bruka ei av likningane til å bestemma s_+. Dette gir løysingane $r = r_+$ og $s = s_+$ slik at

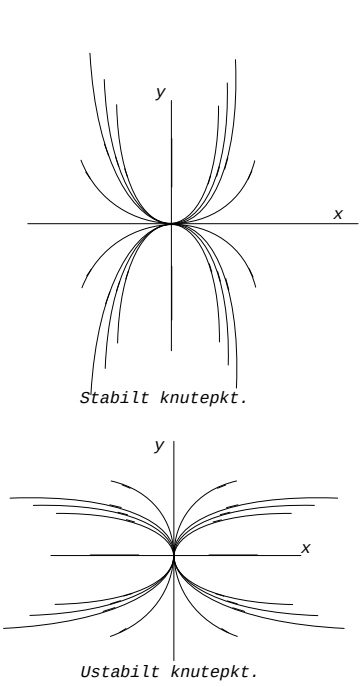
$$\mathbf{e}_+ = \begin{bmatrix} r_+ \\ s_+ \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}\,.$$

Tilsvarande løysing finn ein for $\lambda = \lambda_-$, og vi har den generelle løysinga

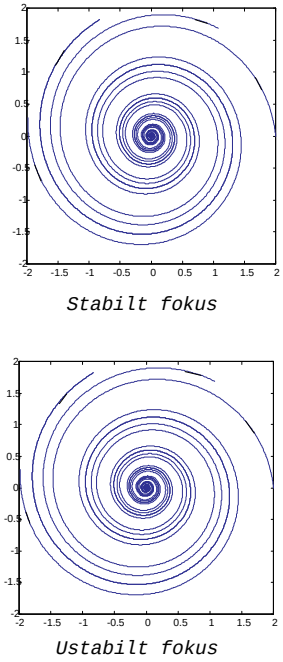
$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{e}_+e^{t\lambda_+} + c_2\mathbf{e}_+e^{t\lambda_-}$$

der c_1 og c_2 er vilkårlege integrasjons-konstantar.

Då vi etter føresetnden har $q > 0$, har båe røtene same forteikn , ein får då det ein kallar eit **knutepunkt**. Eit **knutepunkt** er stabilt når $p < 0$ og ustabilt når $p > 0$, sidan denne parametern bestemmer forteiknet på røtene, d.v.s. eigen-verdiane $\lambda_\pm$. Enkle døme på dette har ein når ein i likn. (106) set: $a = 2,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1$ (ustabilt), og $a = -1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = -2$ (stabilt). Dette er illustrert i Fig. 2 (a).



(a) Knutepunkt



(b) Fokus

Figur 2: Stabilitet av 2d-system. Dei to hovud-typane av likevektspunkt **knutepunkt** og **fokus** eller **spiral**

Tilfellet $\Delta < 0,\ \ q > 0$

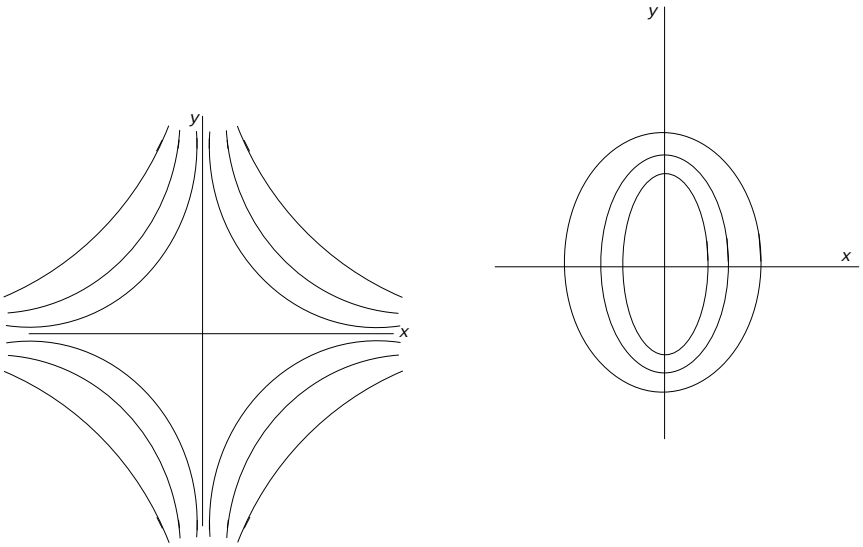
Vi har idette tilfellet komplekse røter som er eit kompleks-konjungert par

$$\lambda = \alpha \pm i\beta\,.$$

Vi får i dette tilfellet ein spiral eller fokus. Ein slik spiral eller fokus kan vere stabil ($p < 0$) eller ustabil ($p > 0$). Typiske faseplansbiletet av dette er vist i Fig. 2 (b).

Tilfellet $\Delta > 0,\ \ q < 0$

I dette tilfellet vert drøftinga som i tilfellet ovanfor, men no har røtene ulikt forteikn og ein får det som kallast eit **sadel-punkt**. Faseplans- biletet av dette er illustrert i Fig. 3 (a)



(a) Sadelpunkt (b) Senter

Figur 3: Stabilitet av 2d-system. Eit **sadelpunkt** og eit **senter**

Tilfellet $\Delta < 0,\ \ q > 0\ p = 0$

Dette er eigentleg eit særtilfelle av eit fokus, men no er det ingen vekst eller demping i systemet. Vi får reint periodiske løysingar og kallar dette eit **senter**. Sjå Fig. 3 (b)

Tilfellet $\Delta = 0,\ \ p > 0$ Løysinga vert

$$\mathbf{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{pt}\,, \tag{108}$$

slik at $p > 0$ gir ustabile løysingar (degenerert knutpunkt), og $p < 0$ gir stabile løysingar (degenerert knutpunkt).

Klassifikasjon av likevekts-punkt i to dimensjonar kan ein etter dette samla i denne tabellen

Type	$2p = a + d$	$q = ad - bc$	$\Delta = p^2 - q$
sadelpunkt	-	$q < 0$	$\Delta > 0$
stabilt knutepkt.	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$
stabil spiral	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
ustabilt knutepkt.	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$
ustabil spiral	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
senter	$p = 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$
deg. stab. knutep.	$p < 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$
deg. ustab. knutep.	$p > 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$

Det er viktig å merka seg at likevektspunktet ikkje er ein del av dei trajektoriane eller banane som går ut frå eller inn mot likevekspunktet. Gjer greie for kvifor det må vere slik!

Kommentarer: Denne drøftinga av system i to dimensjonar let seg gjere på ein oversiktlig og elegant måte ved å bruke faseplanet og bileta av det som skjer der. Ulempen er at denne type drøfting ikkje lett let seg generalisere til dimensjonar høgare enn to. Men det kan likevel vere av noko hjelp å ha eit bilete frå det to-dimensjonale når ein skal drøfta høgare dimensjonar enn to. Ein kan t. d. projisere frå høgare dimensjonar ned i det to-dimensjonale rommet.

3.6 Banestabilitet

Banestabilitet eller Poincarè stabilitet er, som namnet utrykkjer, spørsmål om banen til eit system er stabil, og då i første rekkje ein lukka bane. Dette refererer til eit autonomt system.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})\,. \tag{109}$$

Lat $\mathbf{x}^*(t)$ vere den banen eller løysinga vi stiller spørsmål ved. Vi går ut frå at banen startar i punktet $\mathbf{a}^*$ slik at $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{a}^*$.

Vi tenkjer oss ein omeign av startpunktet $\mathbf{a}^*$ der vi vel nye startpunkt $\mathbf{a}$ med det kravet at $|\mathbf{a} - \mathbf{a}^*| < \delta$. Halvbanen knytt til startpunktet $\mathbf{a}^*$ kallar vi $\mathcal{H}^*$, og den som er knytt til $\mathbf{a}$ kallar vi $\mathcal{H}$. Vi definer formelt banestabilitet som:

Definisjon 3.1 (Bane-stabilitet) *Ein halvbane $\mathcal{H}^*$ styrt av likn. (109) er stabil, dersom det til ein fritt valt ϵ finst ein δ, slik at*

$$|\mathbf{a} - \mathbf{a}^*| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{H}} \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{H}^*) < \epsilon\,. \tag{110}$$

Her er avstanden, "dist", frå eit punkt $\mathbf{x}$ til ei kurve K, definert som:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, K) \stackrel{def}{=} \inf_{\mathbf{y}\in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,. \tag{111}$$

Merk at ein halvbane kan vere ei lukka kurve som gjentar seg sjølv heile tida. Ein meir visuell måte å definera dette på er at ein tenkjer seg (i tre dimensjonar) ein lukka bane omhylla av eit vilkårleg tynt røyr med radius ϵ. Lat oss merkja av eit punkt P der halvbanen startar. Lat så eit vilkårleg punktet Q vere startpunktet for ein annan halvbane slik at dette punktet ligg innanfor ei "kulesentrert i P med radius δ. Dersom alle banar som startar innafor denne $\delta - kula$ vert verande innafor $\epsilon - røyret$, så er banen stabil.

Merk at dette ikkje betyr at to nærliggjande punkt på dei to banane med startpunkt i P og Q alltid vert verande nær kvarandre. T. d. er det vanleg dersom banane er lukka at *rørsla* i den perturberte banen har ein periode som er litt ulik perioden for den uperturberte *rørsla*. Dette vil føra til at dei to punkta fjernar seg frå kvarandre.

3.7 Liapunov stabilitet

Definisjon 3.2 (Liapunov stabilitet) *(i) Vi studerer det generelle tilfellet av ei rørsle (bane)* $\mathbf{x}(t)$ *som startar i* $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*$*, og ser i tillegg på ei annan rørsle (bane) som startar i* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$*.*

Dersom for vilkårleg ϵ*, så finst det ein* $\delta(\epsilon, t_0)$*, slik at*

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \epsilon \quad \text{for} \quad t > t_0\,, \tag{112}$$

så er løysinga Liapunov-stabil.

(ii) **Uniform stabilitet**

Dersom ei løysing $\mathbf{x}^*(t)$*, er Liapunov-stabil for* $t \geq t_0$ *og* δ *under definisjon av Liapunov-stabilitet, (i), er uavhengig av* t_0*, så er løysinga uniformt stabilt for* $t \geq t_0$ *.*

(iii) **Asymptotisk stabilitet**

Dersom ein under (i) i tillegg har oppfylt at

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = 0,$$

så er systemet asymptotisk stabilt.

(iv) Ein kan visa, Cesari [4] 1971 side 5: Dersom eit system er Liapunov-stabilt for startpunkt t_0*, så er det også Liapunov-stabilt for start punkt* $t_1 > t_0$*. (Resultatet er i grunnen sjølvinnlysande.)*

(vi) **Likevekt**

Ein kan godt ha at $\mathbf{x}(t)$ *under (i) er eit likevektspunkt. Dette kan ein sjå på som eit degenerert tilfelle av ein "baneeller rørsle. Definisjonane gjeld også dette tilfellet. (jamfør det som var sagt til slutt i avsnitt (3.5.1))*

(vi) **Ustabilitet**

Dersom $\mathbf{x}^*$ *ovafor ikkje oppfyller krava under (i) - (iii), så er systemet ikkje (uniformt, asymptotisk alt etter som) Liapunov-stabilt.*

For det tilfellet at banen degenerer til eit punkt, tilfelle (v), så gjeld likevel denne definisjonen på stabilitet. Og som nemt under den innleidande drøting av stabilitet av likevekt, så vil denne definisjonen for lineære system og stabilitet av likevektspunkt falla saman med Laplace definisjon av stabilitet. Dette er fordi at for eit lineært system kan ein alltid ved ein konstant faktor skalera ned løysinga så langt ein vil, så lenge den er avgrensa. Og dermed får ein oppfyllt kravet til Liapunov-stabilitet dersom systemet er Laplace-stabilt d. v. s. alle løysingane er avgrensa.

3.7.1 Liapunov-eksponentar

Vi skal innføra eit nytt omgrep, *Liapunov-eksponentar*, som eit hjelpemiddel til å karakterisera løysingar, særleg ustabile. Systmet vårt er som før gitt ved likn. (78). Vi studerer to løysingar, ei som startar i $\mathbf{x}_0$ og ei som startar i $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ ved tidspunktet $t = 0$. Vi skal gå ut frå at $|\mathbf{y}| \leq \epsilon$, der ϵ er ein liten parameter og $\mathbf{y}$ er ein vilkårleg vektor. Med andre ord ser ein på ei spesiell løysing $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, og alle løysingar med nærliggjande startpunkt innafor ϵ-kula med sentrum i $\mathbf{x}_0$. Vi studerer avstanden mellom dei to løysingane definert ved $\mathbf{d}(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Ved rekkjeutvikling finn ein lett

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &\stackrel{def}{=} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{113}$$

der $\mathbf{J}(t)$ er Jacobi-matrisa for transformasjonen $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Vi skal gå ut frå at ϵ er liten nok til at det gir meining å sløyfa andre-ordens ledd og høgare i ϵ. Vi får då å studera den lineære transformasjonen

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}(t)\,, \tag{114}$$

der transformasjons matrisa er avleida av den opphavlege løysinga $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Av dette følgjer det også at $\mathbf{d}(0) = \mathbf{y}$, (merk at $\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}$, einingsmatrisa). Matrisa $\mathbf{J}(t)$ må vere ikkje-singulær ($\det(\mathbf{J}) \neq 0$), kvifor? I den avbildinga vi startar ut med har vi ei n-dimensjonal ϵ-kule som vert avbilda på eitt nytt volum, og i dette tilfelle må det bli ein n-dimensjonal "elipsoide"med halvaksar ϵ_1, ϵ_2, $\ldots$ ϵ_n. Vi skalerer no problemet slik at

$$\epsilon_i(t) \stackrel{def}{=} \epsilon\, a_i(t)\,, \tag{115}$$

altså $\epsilon_i(0) = \epsilon$ og $a_i(0) = 1$ for alle i. Ei kuleflate med radius ϵ kan skrivast som

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{I} \cdot \tilde{\mathbf{r}} = \epsilon^2\,, \tag{116}$$

der $\mathbf{I}$ er einingsmatrisa. Vi brukar så transformasjonen (114) ovanfor og finn

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{I} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{y}} = \epsilon^2\,, \tag{117}$$

eller

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}(t) \cdot \tilde{\mathbf{J}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{y}} = \epsilon^2\,, \tag{118}$$

der $\tilde{\mathbf{J}}$ er den transponerte av matrisa $\mathbf{J}$. Lat λ_i' vere eigen-verdiane til den symmetriske matrisa $\mathbf{J}(t)\cdot\tilde{\mathbf{J}}(t)$. Då kan ein også skriva likn. (118) som

$$y_1^2\lambda_1' + y_2^2\lambda_2' + \ldots + y_n^2\lambda_n' = \epsilon^2\,, \tag{119}$$

eller

$$\frac{y_1^2}{\epsilon_1^2(t)} + \frac{y_2^2}{\epsilon_2^2(t)} + \ldots + \frac{y_n^2}{\epsilon_n^2(t)} = 1\,, \tag{120}$$

der $\epsilon_i^2(t) \stackrel{def}{=} \epsilon^2\frac{1}{\lambda_i'}$ og $\epsilon_i(t)$ er halvaksane i ellipsoiden. Lat så $a_i(t) \stackrel{def}{=} \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon}$.

Vi innfører notasjonen $\nu_i(t) \stackrel{def}{=} \frac{\ln a_i(t)}{t}$ eller $a_i(t) = \exp(t\,\nu_i(t))$ slik at med $\nu_i(t)$ konstant, har ein eksponentiell vekst av $a(t)$.

Definisjon 3.3 (Liapunov-eksponent) *Liapunov-eksponenten λ_i, svarande til $a_i(t)$ er no definert ved*

$$\lambda_i \stackrel{def}{=} \lim_{t\to\infty}\nu_i(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln a_i(t)}{t}\,. \tag{121}$$

Ut frå denne definisjonen kan ein sjå på Liapunov-eksponenten som den midla vekstraten over lang tid for halvaksane i ellipsoiden ein starta ut med. Vi har at volumet i ellipsoiden er proporsjonalt med produktet av halvaksane. Ved å bruka likn. (88), finn ein då

$$\frac{d}{dt}\ln(\epsilon_1\cdot\epsilon_2\cdots\epsilon_n) = \frac{1}{dV}\frac{d(dV)}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{X}\,, \tag{122}$$

som vidare gir

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \nabla\cdot\mathbf{X}dt\,, \tag{123}$$

merk at $\ln\epsilon_i(t) = \ln a_i(t)$+konstant, slik at summen av Liapunov-eksponentane blir langtidsmiddelet av denne divergensen.

3.7.2 Ein spesiell klasse lineære system I

Vi ser på systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{124}$$

der $\mathbf{x}$ er ein n-dimensjonal vektor og $\mathbf{A}(t)$ er ei $n\times n$ matrise. Vi vil studera stabiliteten av ei vilkårleg løysing $\mathbf{x}^*(t)$. Lat $\mathbf{x}(t)$ vere ei annan løysing. Vi definerer $\boldsymbol{\xi}(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$, slik at $\|\boldsymbol{\xi}(t)\|$ måler skilnaden mellom desse løysingane som startar i ein avstand $\|\boldsymbol{\xi}(t_0)\|$, der $\boldsymbol{\xi}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)$. Ein finn då denne likninga for $\boldsymbol{\xi}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\xi}(t)\,. \tag{125}$$

Dette syner at stabiliteten for *null*-løysinga av dette systemet er den same som for likn. (124). I denne samanhengen kallar ein gjerne $\boldsymbol{\xi}(t)$ for ein perturbasjon av løysinga $\mathbf{x}^*(t)$.

3.7.3 Struktur av n-dimensjonale lineære system

Vi har systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}\,, \tag{126}$$

der $\mathbf{A}(t)$ er ei $n \times n$ matrise med element $a_{ij}(t)$ som er funksjonar av t og vidare er $\mathbf{x}(t)$ ein n-dimensjonal søylevektor. Systemet er tydelegvis ikkje autonomt. Lat $\mathbf{x}_i$ der $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ vere n reelle eller komplekse løysingsvektorar til likn. (126). Då vil også $\mathbf{x}(t) = \sum_i^n \alpha_i\, \mathbf{x}_i(t)$ vere ei løysing for vilkårleg val av konstantane α_i.

Definisjon 3.4 (Lineært uavhengige vektorfunksjonar) *Lat $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n(t)$ vere reelle eller komplekse vektorfunksjonar. Dersom det finst konstantar α_1, α_2, $\ldots$, α_n som ikkje alle er null slik at $\sum_i^n \alpha_i\, \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0}$, då er vektorfunksjonane $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n(t)$ lineært avhengige, elles er dei lineært uavhengige.*

Teorem 3.7 (Løysingsrom-1) *Alle $n+1$ system av løysingar av den n-dimensjonale likninga (126) er lineært avhengige.*

Teorem 3.8 (Løysingsrom-2) *Der finst alltid eit sett av n lineært uavhengige løysingar av likn. (126).*

Teorem 3.9 (Løysingsrom-3) *Lat $\boldsymbol{\phi}_1(t)$, $\boldsymbol{\phi}_2(t)$, $\ldots$, $\boldsymbol{\phi}_n(t)$ vere eit vilkårleg sett av n lineært uavhengige løysings-vektorar (reelle eller komplekse) av likn. (126). Då har vi at ei vilkårleg løysing kan skrivast som ein lineærkombinasjon av desse løysings-vektorane.*

Provet for desse teorema overlet ein til lesaren.

Definisjon 3.5 (Fundamental-matrise) *Lat $\boldsymbol{\phi}_1(t)$, $\boldsymbol{\phi}_2(t)$, $\ldots$, $\boldsymbol{\phi}_n(t)$ vere n lineært uavhengige løysings-vektorar (reelle eller komplekse) av likn. (126). Matrisa som ein får ved å setja saman desse løysings-vektorane*

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = (\boldsymbol{\phi}_1(t), \boldsymbol{\phi}_2(t), \ldots, \boldsymbol{\phi}_n(t)) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \tag{127}$$

kallar vi ei fundamental-matrise.

Teorem 3.10 (Løysing - løysingsmatrise) *Gitt ei vilkårleg løysings-matrise $\boldsymbol{\Phi}(t)$ for likn. (126). Då har vi at enten er:*

(i) $\det\{\mathbf{\Phi}(t)\} = 0, \qquad \forall\, t$, *eller*

(ii) $\det\{\mathbf{\Phi}(t)\} \neq 0, \qquad \forall\, t$

Merk at determinanten, $\det(\mathbf{\Phi}(t))$, gjerne vert kalla Wronski-determinanten. Den har som kjent den eigenskapen at enten er den identisk lik null, eller så er den ulik null for alle t. Dette er i samsvar med resultatet vi nett fann.

Tilfelle (i) er det som skjer når løysingane er lineært avhengige. Tilfelle (ii) er det som skjer når løysingane er lineært uavhengige, då har vi at *løysings-matrisa* er ei *fundamental-matrise*. Sjå elles M117, Boyce og DiPrima [7].

Teorem 3.11 (Løysing v.h.a. fundamental-matrise-1) *Den løysinga av likn. (126) som oppfyller starkravet* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *er gitt som* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$, *der* $\mathbf{\Phi}(t)$ *er ei vilkårleg fundamentalmatrise.*

Teorem 3.12 (Løysing v.h.a. fundamental-matrise-2a) *Den løysinga av* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{t})$ *som oppfyller startkravet* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kan skrivast som*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds\,, \tag{128}$$

der $\mathbf{\Phi}(t)$ *er ei vilkårleg fundamentalmatrise som oppfyller* $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}$.

Prov: Dette kan lett visast ved derivasjon av likn. (128) og bruk av $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$.

Alternativt har ein også når $\mathbf{A}$ i likn. (124) er ei konstant matrise:

Teorem 3.13 (Løysing v.h.a. fundamental-matrise-2b) *Den løysinga av* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{t})$ *som oppfyller startkravet* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kan skrivast som*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t-s+t_0)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{f}(s)ds\,, \tag{129}$$

der $\mathbf{\Phi}(t)$ *er ei vilkårleg fundamentalmatrise som oppfyller* $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$ *(merk at* $\mathbf{A}$ *er konstant).*

Prov: Dette kan som i føregåande teorem lett visast ved derivasjon og bruk av $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$. Merk at den deriverte av integralet får to bidrag, som funksjon av øvre grense og som eksplisitt funksjon av t under integral-teiknet og at p.g.a at $\mathbf{A}$ er konstant kan $\mathbf{A}$ setjast utanfor integralet.

Ein overlet til lesaren å gå gjennom detaljane i desse prova.

Viktig merknad: Det er vanleg å velja *fundamental-matrisa* slik at $\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{I}$, altså lik einingsmatrisa. Formlane ovanfor forenklar seg ein del ved eit slikt val.

Teorem 3.14 (Lineær stabilitet) *Null (og andre løysingar) av* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$ *for* $t > t_0$ *(der* t_0 *er vilkårleg) er stabil (Liapunov) dersom og berre dersom alle løysingar er avgrensa. Dersom* $\mathbf{A}$ *er ei konstant matrise og alle løysingane er avgrensa, så er løysingane uniformt stabile.*

Prov: Når alle løysinar $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$ er avgrensa, må også fundamental-matrisa $\mathbf{\Phi}$ vere avgrensa d. v. s. det finst ein konstant M, slik at $\|\mathbf{\Phi}\| < M$, der vi kan ha $\|\mathbf{\Phi}\| \stackrel{def}{=} \sum_{i,j} \sqrt{\Phi ij^2}$ [5]. Lat så $\mathbf{x}(t)$ vere løysing av $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x}$ og gitt $\epsilon > 0$ og vilkårleg liten. Vi finn då

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \leq \|\mathbf{\Phi}(t)\|\|\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}\| \leq M\|\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}\| < \epsilon \tag{130}$$

for $\|\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}| < \delta = \frac{\epsilon}{M}$.

Dersom $\mathbf{A}$ er konstant og systemet er stabilt, så er stabilitet knytt til eigenverdiane til $\mathbf{A}$ og dette problemet er uavhengig av t. Dersom eit slikt system er stabilt er det difor uniformt stabilt.

Q.E.D.

Meir utførleg drøfting av system der $\mathbf{A}$ er ei konstant matrise er gjort i M 117. Repeter dette der!

3.7.4 Ein spesiell klasse lineære system II

Vi skal under dette punktet studera system av typen

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A} + \mathbf{C}(t)\}\mathbf{x}\,, \tag{131}$$

der $\mathbf{A}$ er ei konstant matrise. Det kan visast at under nokså generelle vilkår, er stabiliteten av dette systemet bestemt av det reduserte linære systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,. \tag{132}$$

Det er lettast å syna dette resultatet ved å bruka eit velkjent teorm som kallast *Gronwall sitt lemma*. Dette kan formulerast slik:

Teorem 3.15 (Gronwall-lemmaet) *Dersom vi for $t \geq t_0$ har oppfylt:*

1. *$u(t)$ og $v(t)$ er kontinuerlege og vi har $u(t) > 0$ og $v(t) > 0$;*
2. $$u(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds\,, \quad \text{der} \quad K > 0\,; \tag{133}$$

då har ein at

$$u(t) \leq K e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}\,, \quad t \geq t_0 \quad K > 0 \tag{134}$$

Prov: Høgre sida i likn. (133) er positiv sidan $K > 0$ og $u(t),\ v(t) \geq 0$. Likn. (133) gir difor at

$$\frac{u(t)\, v(t)}{K + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds} \leq v(t)\,. \tag{135}$$

Ved å integrera likn. (135) frå t_0 til t finn ein

$$\ln\left\{K + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds\right\} - \ln K \leq \int_{t0}^{t} v(s) ds\,, \tag{136}$$

[5] Det finst fleire måtar å definera normen til ei matrise på.

eller

$$K + \int_{t_0}^{t} u(s)\, v(s)\, ds \leq K e^{\int_{t_0}^{t} v(s) ds}\,. \tag{137}$$

Når ein så brukar likn. (133) ein gong til, så får ein resulatet i likn. (134).
Q.E.D.

Vi skal no bruka dette teoremet til å visa følgjande resultat

Teorem 3.16 *Dersom*

1. $\mathbf{A}$ *er ei konstant matrise der alle eigenverde har negativ realdel;*
2. $\mathbf{C}(t)$ *er ei kontinuerleg matrise for* $t \geq t_0$ *og*

$$\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{C}(t)\| dt \quad er\ avgrensa\ for \quad t > t_0\,, \tag{138}$$

då er alle løysingar av systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A} + \mathbf{C}(t)\}\mathbf{x}\,, \tag{139}$$

asymptotisk stabile.

Prov: Vi skriv systemet som

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}(t)\mathbf{x}\,. \tag{140}$$

Dersom $\mathbf{x}(t)$ er ei løysing, så kan siste leddet, $\mathbf{C}(t)\mathbf{x}$ spela rollen som $\mathbf{f}(t)$ i likn. (124) der ein har vist at stabiliteten av null-løysinga var den same som stabiliteten til nulløysinga av $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Vi har difor frå likn. (139) at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t - s + t_0)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{C}(s)\mathbf{x}(s) ds\,, \tag{141}$$

der $\mathbf{\Phi}(t)$ er ei fundamentalmatrise for systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. At likn. (141) er rett finn ein ved å ta den deriverter av denne likninga. Men hugs å derivere både med omsyn på øvre grense og under integralteiknet og å bruke at $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$.

Sjå også teorem **3.12**. Merk at $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Ved bruk av eigenskapane for norm finn ein vidare frå likn. (141)

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{\Phi}(t)\|\, \|\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\|\, \|\mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{\Phi}(t - s + t_0)\|\, \|\mathbf{C}(s)\|\, \|\mathbf{x}(s)\| ds\,. \tag{142}$$

Vi skal no bruka at fundamental-matrisa $\mathbf{\Phi}(t)$ er knytt til matrisa $\mathbf{A}$ gjennom eigenverda. Sidan alle løysingsvektorane som utgjer matrisa $\mathbf{\Phi}(t)$ er asymptotisk stabile p. g. a. førestnaden, alle eigenverde har negativ realdel, så finst det det to positive tal, M og m slik at

$$\|\mathbf{\Phi}(t)\| \leq M\, e^{-mt}\,, \quad t \geq t_0\,. \tag{143}$$

Vi let vidar

$$\|\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\| \leq \beta\,. \tag{144}$$

Ved å bruka likn. (143) og likn. (144), kan vi omskriva likn. (142), så vi får

$$\|\mathbf{x}(t)\|e^{mt} \leq M\beta\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t0}^{t}\{\|\mathbf{x}(s)\|\,e^{ms}\}\{\|\mathbf{C}(s)\|\,M\,\beta\,e^{-mt_0}\}ds\,. \tag{145}$$

I likn. (133) let vi

$$u(t) = \|\mathbf{x}(t)\|\,e^{mt}\,, \quad v(t) = \|\mathbf{C}(t)\|\,\beta\,M\,e^{-mt_0} \quad \text{og} \quad K = M\,\beta\,\|\mathbf{x}_0\|\,,$$

slik at ein til slutt får ved hjelp av Gronwall-lemmaet, teorem **3.15**

$$\|\mathbf{x}(t)\|e^{mt} \leq M\beta\|\mathbf{x}_0\|e^{\beta\,M\,e^{-mt_0}\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{C}(s)\|ds} \tag{146}$$

eller

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M\beta\|\mathbf{x}_0\|e^{\{\beta\,M\,e^{-mt_0}\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{C}(s)\|ds\}-mt}\,. \tag{147}$$

Ut frå dette ser ein at alle løysingar er avgrensa for $t > t_0$. Dei er difor stabile. Men sidan alle løysingane også går mot null for $t \to \infty$, så er dei asymptotisk stabile.

Dersom $\mathbf{C}(t)$ oppfyller krava i teorem **3.15**, men alle løysingane av $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ikkje er asymptotisk stabile, men berre avgrensa. Då vil det same gjelda for systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}$. Dette ser ein lett ved å velje $m = 0$ i likn. (147)

3.8 Lineære system, periodiske koeffisientar

Vi ser på system av typen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}\,, \quad \text{med} \quad \mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t)\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \tag{148}$$

der $\mathbf{P}(t)$ er ei $n \times n$ matrise med element som er periodiske funksjonar av t. Den minste perioden er T, men systemet har naturlegvis også periodane $2T,\ 3T,\ +\ldots$. Vi finn $\nabla\cdot(\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{x}) = \sum_{i,j}P_{ij}\delta_{ij} = \sum_i P_{ii} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{P})$, slik at det er sporet i $\mathbf{P}$-matrisa som bestemmer om systemet er konservativt eller ikkje.

Løysingar av eit problem som dette er ikkje alltid periodiske, som dette eksemplet syner:

$$\dot{x} = (1+\sin t)x\,,$$

med løysinga

$$x = ce^{t-\cos t}\,,$$

der c er ein vilkårleg konstant. For systemet (148) har ein dette teoremet (Floquet's teorem):

Teorem 3.17 (Periodiske system) *Det regulære systemet* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ *der* $\mathbf{P}$ *er ein* $n \times n$ *matrise-funksjon med minste periode* T*, har minst ei ikkje-triviell løysing* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(t)$ *slik at*

$$\boldsymbol{\chi}(t+T) = \mu\,\boldsymbol{\chi}(t)\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \tag{149}$$

der μ *er ein konstant.*

Prov:

Lat $\mathbf{\Phi}(t)$ vere ei *fundamental-matrise* for systemet slik at

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t)\,. \tag{150}$$

det gir

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t+T) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t+T)\,, \tag{151}$$

på grunn av periodisiteten i $\mathbf{P}$. Vi har frå Teorem 3.10 at $\det(\mathbf{\Phi}(t+T)) \neq 0$. Dette er difor også ei fundamentalmatrise som kan uttrykkjast ved den første, altså

$$\mathbf{\Phi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{E} \tag{152}$$

der $\mathbf{E}$ er ei konstant matrise som har ein determinant ulik null sidan $\det(\mathbf{\Phi}(t+T)) = \det(\mathbf{\Phi}(t))\,\det(\mathbf{E})$ (Teorem 3.10).

Lat μ vere eigen-verdiane til $\mathbf{E}$, altså $\det(\mathbf{E}-\mu\mathbf{I}) = 0$. Lat vidare $\mathbf{s}$ vere eigen-vektoren svarande til eigen-verdien μ slik at $(\mathbf{E}-\mu\mathbf{I})\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

Vi ser på løysinga $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{s} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\chi}(t)$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}(t+T) &= \mathbf{\Phi}(t+T)\mathbf{s} \\
&= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{\Phi}(t)\mu\mathbf{s} \\
&= \mu\,\boldsymbol{\chi}(t)\,.
\end{aligned}$$

Q.E.D

Eigen-verdiane til matrisa $\mathbf{E}$ vert kalla karakteristiske tal for likn. (148). Det interesante her er om det finst karakteristiske tal med verdiar som gir periodiske løysingar.

Teorem 3.18 (Konstanten μ) *Konstanten μ i teorem 3.17 er uavhengig av val av fundamentalløysing $\mathbf{\Phi}$.*

Prov:

Lat $\mathbf{\Phi}$ og $\mathbf{\Phi}^*$ vere to fundamentalmatriser knytte saman med den konstante matrisa $\mathbf{C}$ slik at $\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}\mathbf{C}$. Lat vidare T vere minimal-perioden for $\mathbf{P}(t)$. Vi finn då

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}^*(t+T) &= \mathbf{\Phi}(t+T)\mathbf{C} \\
&= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{E}\mathbf{C} \\
&= \mathbf{\Phi}^*(t)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{C} \\
&= \mathbf{\Phi}^*(t)\mathbf{D}
\end{aligned}$$

og her merkar vi oss at $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$ er similære matriser som betyr at dei har same eigen-verdiar.

Q.E.D.

Merk at vi kan difor trygt referere til dei karakteristiske tala for systemet som noko unikt, noko som er uavhengig av korleis løysingar er representerte. Vidar har ein at dersom $\mathbf{\Phi}$ er ei reell matrise, så er også $\mathbf{E}$ reell, slik at den karakteristiske likninga for tala μ har reelle koeffisientar. Difor vil det til einkvar kompleks μ svara eit karakteristisk tal som er den kompleks konjungerte $\bar{\mu}$.

Definisjon 3.6 (Karakteristisk eksponent) *Lat μ vere det karakteristiske talet svarande til likn. (148). Då har vi ρ definert ved $\exp(\rho T) \stackrel{def}{=} \mu$, og ρ kallast den karakteristiske eksponenten for systemet.*

Vi merkar oss at ρ er definert slik at ein kan leggja til eit vilkårleg multiplum av $2\pi i/T$. Ein fikserer gjerne μ ved å krevje $-\pi < \Im(\rho T) < \pi$, eller ved at $\rho \stackrel{def}{=} \frac{1}{T}\log(\mu)$, der ein nyttar prinsipal-verdien av logaritmen.

Teorem 3.19 (Floquet representasjon) *Gå ut frå at $\mathbf{E}$ i provet for Teorem 3.17 har n ulike eigen-verdiar, $\mu_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. Då har likn. (148) n lineært uavhengige normal løysingar på forma*

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i(t)e^{\rho_i t} \tag{153}$$

der ρ_i er dei karakteristiske eksponentane svarande til μ_i, og $\mathbf{p}_i$ er periodiske funksjonar med periode T.

Prov:

Til kvar μ_i svarar ei løysing $\mathbf{x}_i$ som er løysing av likn. (149): $\mathbf{x}_i(t+T) = \mu_i\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t)e^{\rho_i T}$. Difor har vi for vilkårleg t at

$$\mathbf{x}_i(t+T)e^{-\rho_i(t+T)} = \mathbf{x}_i(t)e^{-\rho_i t}\,. \tag{154}$$

Med $\mathbf{p}_i(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_i(t)e^{-\rho_i t}$ ser ein at $\mathbf{p}_i(t)$ har periode T.

Q.E.D.

3.8.1 Stabilitet av periodiske system

Frå likn. (148) har vi når $\mathbf{\Phi}(t)$ er ei fundamental-matrise at $\mathbf{\Phi}(t + N\,T)$ også er ei fundamental-matrise, sidan $\mathbf{P}(t + N\,T) = \mathbf{P}(t)$. Difor finst det ei konstant matrise $\mathbf{C}$ slik at

$$\mathbf{\Phi}(t + N\,T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}\,. \tag{155}$$

Ved å velja fundamentalmatrisa slik at $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ (einingsmatrisa), så finn ein lett ved å setje $t = 0$ i likn. (155) at $\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(N\,T)$. Ved så å setje $t = T$ i likn. (155), finn ein vidare at

$$\mathbf{\Phi}((N+1)\,T) = \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{\Phi}(N\,T) \tag{156}$$

som gir

$$\mathbf{\Phi}(N\,T) = \mathbf{\Phi}^N(T) = \mathbf{B}^N \quad \text{der} \quad \mathbf{B} \stackrel{def}{=} \mathbf{\Phi}(T)\,, \tag{157}$$

slik at

$$\mathbf{\Phi}(t + N\,T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B}^N\,. \tag{158}$$

No kan vi alltid skriva ein vilkårleg t som $t = p + N\,T$ der $p \in (0, T)$. Vi har då dette resultatet

Teorem 3.20 *Dersom $\mathbf{\Phi}(t)$ er avgrensa for $t \in (0, T)$, så vil $\mathbf{\Phi}(t)$ vere avgrensa for alle t dersom og berre dersom $\mathbf{B}^N$ er avgrensa når $N \to \infty$.*

Prov:

Frå likn. (158) med $t = p \in (0, T)$ finn ein

$$\|\mathbf{\Phi}(t)\| = \|\mathbf{\Phi}(p + N\,T)\| \leq \|\mathbf{\Phi}(p)\|\|\mathbf{B}^N\|\,,$$

som syner at $\|\mathbf{\Phi}(t)\|$ er avgrensa dersom $\|\mathbf{B}^N\|$ er avgrensa.

Vidare har ein også frå likn. (158), sidan $\det(\mathbf{\Phi}(p)) \neq 0$ etter Teorem 3.10, at

$$\mathbf{\Phi}(p)^{-1}\mathbf{\Phi}(p + N\,T) = \mathbf{B}^N\,.$$

Då finn ein, sidan $\|\mathbf{\Phi}(p)^{-1}\|$ er avgrensa, at

$$\|\mathbf{B}^N\| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{\Phi}(p + N\,T)\| \to \infty\,.$$

Q.E.D.

Definisjon 3.7 (Spektral-radius) *Lat $\mathbf{B}$ vere ei matrise med eigen-verdiar λ_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots)$. Spektralradien $r(\mathbf{B}) \stackrel{def}{=} \max_i |\lambda_i|$.*

Teorem 3.21 (Asymptotisk stabilitet) *Likn. (148) har asymptotisk stabile løysingar dersom og berre dersom $\mathbf{B}$ gitt i likn. (158) har ein spektral-radius $r(\mathbf{B}) < 1$. Dersom $r(\mathbf{B}) = 1$, er løysingane framleis stabile dersom ein ikkje har samanfallande eigen-verdiar.*

Prov: Dersom vi vel ein representasjon der $\mathbf{B}$ er diagonal, altså der diagonal-elementa er eigenverda til $\mathbf{B}$, $\lambda_i\,,\ i = 1,\, 2,\, \ldots\,, n$, då vil $\mathbf{B}^N$ vera diagonal med diagonalelementa λ_i^N. Resultatet følgjer så frå Teorem 3.20.

Q.E.D.

Problemet med å finna $\mathbf{B}$ og dermed spektralradien analytisk kan ofte falle vanskeleg, og då har ein gjerne berre numeriske metodar å falla tilbake på. Men i eksempel 3.3 let det seg gjere å finna eit analytisk uttrykk.

Eksempel 3.3 (Hill-likninga) *Hill si likning kan skrivast som*

$$\ddot{x} + F(t)\,x = 0 \quad \text{der} \quad F(T + t) = F(t)\,. \tag{159}$$

På matrise form i samsvar med likn. (148), blir dette

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -F(t) & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{160}$$

Vi merkar oss at sporet $tr(\mathbf{P}(t)) = 0$ *(eller* $\nabla \cdot \mathbf{X} = 0$*) som viser at systemet er konservativt, og areal er konservert under rørsle i faseplanet. Difor må avbildinga vi har i likn. (158) ha ein Jacobi determinant lik 1 eller* $\det(\mathbf{B})$*=1. Eigen-verdiane til* $\mathbf{B}$ *tilfredstiller den karakteristiske likninga*

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{B})\lambda + \det(\mathbf{B}) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{B})\lambda + 1 = 0\,, \tag{161}$$

Dette gir tre tilfelle:

(i) $|\mathrm{tr}(\mathbf{B})| > 2$*: Likn. (161) har to reelle røter, der ei rot alltid er større enn* 1*, sidan* $\lambda_1\,\lambda_2 = 1$*. Difor finst det ei løysing av likn. (159), der spektralradien* $r(\mathbf{B}) > 0$*, som gir ustabil løysing.*

(ii) $|\mathrm{tr}(\mathbf{B})| < 2$*: Likn. (161) har komplekse røter (kompleks konjungerte) som ligg på sirkelen med radius 1,* $r(\mathbf{B}) = 1$*, og løysingane til likn. (159) er stabile.*

(iii) $|\mathrm{tr}(\mathbf{B})| = 2$ *Dette er grensetilfellet når Likn. (161) har ei* T*-periodisk (eller* $2T$*-periodisk løysing).*

Når $\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = 2$ *har ein samanfallande røter* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$*. Vel vi den tilsvarande eigenvektoren som startvektor i likn. (158), så finn ein* $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$ *altså* T*-periodisk.*

Når $\mathrm{tr}(\mathbf{B}) = -2$ *har ein samanfallande røter* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$*. Vel vi den tilsvarande eigenvektoren som startvektor i likn. (158), så finn ein* $\mathbf{x}(T) = -\mathbf{x}(0)$ *og* $\mathbf{x}(2T) = -\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$*, altså* $2T$*-periodisk løysing.*

Merk at generelt har ein at ei løysing kan skrivast som $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$, der $\mathbf{x}_0$ er start-vektoren. Når ein så brukar resultatet i likn. (158), kan ein lett visa resultata under (iii) ovanfor.

3.9 Liapunov sin direkte metode

Liapunov sin direkte metode er ein effektiv metode til å avgjere spørsmålet om stabilitet når metoden verkar. Problemet er at metoden byggjer på kunnskap om ein funksjon med visse eigenskapar, og det finst ingen generell metode for å finna denne funksjonen. Vi skal illustrera dette ved eit eksempel.

Eksempel 3.4 *Undersøk stabiliteten av systemet*

$$\dot{x} = -y - x^3\,, \qquad \dot{y} = x - y^3 \tag{162}$$

Vi ser på funksjonen

$$V(x,y) \stackrel{def}{=} x^2 + y^2 \tag{163}$$

og merkar oss at $V(x,y) =$ *konstant, gir sirklar i faseplanet, altså lukka kurver. Dette følgjer av at vi ser på ein poistiv definit funksjon (for dette konkrete tilfelle er det lett å overtyda seg om dette ved å gå over til polar-koordinatar). Vidare ser ein at dersom ein deriverer* $V(x,y)$ *langs ein trajektorie d. v. s.*

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &\stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}V(x,y) \stackrel{def}{=} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\dot{y} \\
&= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\
&= 2x(-y - x^4) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \le 0\,,
\end{aligned} \tag{164}$$

så har ein at langs ein kvar trajektorie, så må $V(x,y)$ avta, så lenge vi er utanfor likevektspunktet $(x,y) = (0,0)$. Ein kryssar altså sirklar som vert mindre og mindre. Ein kan difor dra den konklusjonen at ei kvar rørsle må gå innover mot likevektspunktet som difor er stabilt. Dette gjeld same kvar ein startar i faseplanet.

Vi skal merka oss at funksjonen $V(x,y)$, som ein gjerne kallar Liapunov-funksjonen, den har vi inga generell oppskrift på korleis ein kan finna. Vidare merkar vi oss at denne Liapunov-funksjonen hadde to viktige eigenskapar som vi nytta:

1) $V(x,y) > 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$. (gav lukka banar).

2) $\frac{d}{dt}V(x,y) < 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$. (gav retning på banane, innover).

Før vi går over til å sjå på den generelle formuleringa for Liapunov sin direkte metode, så treng vi klargjere omgrepet positiv / negativt definitte funksjonar.

Definisjon 3.8 (Positiv (negativ) definit) *Funksjonen $V(\mathbf{x})$ er positiv (negativ) definit i ein omeign $\mathcal{S}$ om origo dersom $V(\mathbf{x}) > 0$ $(V(\mathbf{x}) < 0)$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathcal{S}$, og $V(\mathbf{0}) = 0$.*

Funksjonen $V(\mathbf{x})$ er positiv (negativ) semi-definit i ein omeign $\mathcal{S}$ om origo dersom $V(\mathbf{x}) \geq 0$ $(V(\mathbf{x}) \leq 0)$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i $\mathcal{S}$, og $V(\mathbf{0}) = 0$.

Ser ein på eksempelet 3.4, så merkar vi at her er $V(x,y)$ positiv definit og $\dot{V}(x,y)$ negativ definit.

Den totalderiverte (den deriverte langs trajektorien) for det generelle tilfellet vert

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x})\,, \tag{165}$$

merk at $\dot{x}_i = X_i(\mathbf{x})$. Merk også at origo her igrunnen står for eit fritt valt punkt som vi vil undersøkja stabiliteten av. Ved ein koordinat-transformasjon kan ein alltid velja eit fritt valt punkt $\mathbf{x}_0$ som origo.

3.9.1 Positivt definitte funksjonar, eigenskapar

Positivt definitte funksjonar har visse eigenskapar som vi skal sjå på. Det generelle tilfellet av ein slik funkson i $\mathbb{R}^n$ kan vera svært komplisert. Vi skal i det følgjande tenkja oss at vi er nær nok origo til at det det som dominerer oppførselen til den definitte funksjonen $V(\mathbf{x})$ er ei Taylor-utvikling av denne funksjonen til 2. orden.[6] Biletet av funksjonen vil då forenkla seg til studiet av ei kvadratisk form som er positiv definitt. Ser ein på "flatene" $V(\mathbf{x}) = c$, der c er ein konstant, så får ein at: I $\mathbb{R}^2$ vil det bli ellipsar eller sirklar, i $\mathbb{R}^3$, vil det bli ellipsoidar eller kuleflater. Desse flatene er nesta inni kvarandre, slik at flata $V(\mathbf{x}) = c_2$ ligg inni flata $V(\mathbf{x}) = c_1$, når $c_2 < c_1$. Når ein er nær nok origo, så har ein difor at $V(\mathbf{x}) < c$ med c konstant, definerer eit ope og avgrensa område $\mathcal{V}_c$, som inneheld origo. Vi definerer diameteren d i $\mathcal{V}_c$ som

$$d \stackrel{def}{=} \sup_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}_c\,,\, \mathbf{x}_j \in \mathcal{V}_c} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|\,. \tag{166}$$

[6] Dette krev eigentleg at den andre-deriverte eksisterer og er difor eit strengare krav enn nødvendig.

Vi har no at $\mathcal{V}_c$ har den eigenskapen at lim $c \to 0 \quad \Rightarrow \quad d \to 0$. Når $c_2 < c_1$, så har ein at $\mathcal{V}_{c_1}$ inneheld randa til $\mathcal{V}_{c_2}$. Desse eigenskapane vert brukt i prova for dei teorema som følgjer. Sjå også Fig. 4.

3.9.2 Liapunov kriterier for stabilitet

Teorem 3.22 *Lat* $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{0}\,,\ t \geq t_0$*, vere løysinga av det regulære autonome systemet*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})\,, \quad \text{der} \quad \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,. \tag{167}$$

Då er $\mathbf{x}^*(t)$ *uniformt stabil for* $t \geq t_0$ *dersom det eksisterer ein funksjon* $V(\mathbf{x})$ *med følgjande eigenskapar i ein omeign* $\mathcal{V}^*$ *om* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*:*

(i) $V(\mathbf{x})$ *er kontinuerleg med kontinuerlege partielle deriverte;*

(ii) $V(\mathbf{x})$ *er positiv definit;*

(iii) $\dot{V}(\mathbf{x})$ *er negativ semidefinit.*

Prov: Velg ein vilkårleg ϵ, slik at $\mathcal{V}_\epsilon \subset \mathcal{V}^*$. Frå (iii) har ein $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ for $\mathbf{x} \subset \mathcal{V}_\epsilon$. Ein halv-bane som startar i $\mathcal{V}_\epsilon$ vil difor bli innafor $\mathcal{V}_\epsilon$ på grunn av (i) - (iii). Det same gjeld for einkvar liten nok ϵ, og det gjeld difor for einkvar liten nok omeigen om origo. Null-løysinga er difor stabil (og den er også uniformt stabil sidan systemet er autonomt).

Q.E.D.

Definisjon 3.9 (Liapunov-funksjon) *Ein funksjon* $V(\mathbf{x})$ *som fyller krava i Teorem 3.22 kalla vi ein* **Liapunov-funksjon** *for systemet.*

Teorem 3.23 *Lat alle vilkår i Theorem 3.22 vere oppfylt med unntak av (iii) som blir erstatta med*

(iii)′ $\dot{V}(\mathbf{x})$ *er negativt definit.*

Då er nullløysinga asymptotisk stabil. Ein slik Liapunov-funksjon vert kalla ein **sterk Liapunov-funksjon** *for systemet.*

Prov: For dette tilfellet gjeld alt som vart sagt under provet for teorem 3.22, men sidan $V(\mathbf{x})$ er strengt avtakande, må V enda opp med sin minste verdi som er null. Systemet er difor asymptotisk stabilt.

Q.E.D.

Dei følgjande teorema er eksempel på andre formuleringar med tilsvarande krav som dei under Teorem 3.22 og 3.23.

Teorem 3.24 *Lat* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *vere eit likevektspunkt og* $\mathcal{V}^*$ *ein omeign av* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*. Dersom det finst ein funksjon* $V(\mathbf{x})$ *som er definit i* $\mathcal{V}^*$ *slik at* $V\dot{V}$ *er kontinuerleg og definit; då er likevektspunktet* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*:*

(i) asymptotisk stabilt dersom $\dot{V}V < 0$*,*

(ii) ustabilt dersom $\dot{V}V > 0$*.*

Prov: Frå (i) har ein at $\dot{V}V < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) < 0$, slik at den positiv definitte storleiken $\frac{1}{2}V^2$ har ein negativ vekstrate. Vi har då frå teorem 3.23 at systemet er asymptotisk stabilt.

Siste del av teoremet (ii) følgjer frå teorem 3.26. Sjå dette teoremet.

Q.E.D.

Eksempel 3.5 *Vi har følgjande system*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x - xy^2 \stackrel{def}{=} X_x\,, \\ \dot{y} &= -2x - y - yx^2 \stackrel{def}{=} X_y\,, \quad \nabla\cdot\mathbf{X} = -2 - x^2 - y^2 < 0\,, \text{ dissipativt syst.} \end{aligned}$$

Systemet har likevektspunkt $(0,0)$*. Vi prøver med Liapunov-funksjonen* $V(x,y) \stackrel{def}{=} x^2 + ay^2$*, som vi merkar oss er positiv definit dersom* $a \geq 0$*.*

$$\dot{V} = 2xX_x + 2ayX_y = -2(x^2 + ay^2 + (1+a)x^2y^2 + (2a-1)xy)\,. \qquad (168)$$

Vi vel $a = \frac{1}{2}$ *og ser at uttrykket i likn. (168) blir negativt definit. Ut frå Teorem 3.23 blir systemet asymptotisk stabilt.*

Teorem 3.25 *Dersom det finst ein funksjon* $V(\mathbf{x})$ *som er definit i* $\mathcal{V}^*$ *slik at* $V\dot{V}$ *er kontinuerleg og negativ semi-definit (*$V\dot{V} \leq 0$*); då er likevektspunktet* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *stabilt.*

Prov: Då $\frac{1}{2}V^2(\mathbf{x})$ er positiv definit og $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}V^2(\mathbf{x})) \leq 0$ i $\mathcal{V}^*$, så er $\frac{1}{2}V^2(\mathbf{x})$ ein Liapunov-funksjon i samsvar med teorem 3.22. Systemet er difor stabilt.

Q.E.D.

Alternativt kan ein visa dette direkte som følgjer:

Då $V(\mathbf{x})$ er definit i $\mathcal{V}^*$, så må $V(\mathbf{x}) = c$, der c er konstant og tilstrekkeleg liten definera ein omeign $\mathcal{V}_c$, som er tilstrekkeleg nær origo slik a nivåflatene innafor er lukka flater om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der $\mathcal{V}_c \subset \mathcal{V}^*$. Difor har ein at for vilkårleg gitt $\epsilon > 0$, så finst det ein $\delta > 0$, slik at når ein vel startpunktet ($\mathbf{x}_0$ for $t = 0$) for ein halv-bane innafor ei δ-kule om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så vil nivåflata ein startar på heilt ut liggja innafor ϵ-kula om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som er eit subset av $\mathcal{V}_\epsilon$. Dette er fordi $\dot{V}V \leq 0$ $\rightarrow |V| \leq |V_0|$, der $V_0 \stackrel{def}{=} V(\mathbf{x}_0)$ og $\mathbf{x}_0$ er startpunktet for halvbanen, medfører at halvbanen vil vere på eller innafor nivåflata $V = V_0$. Altså har vi: $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$ $\rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon$ for alle $t > 0$.

Q.E.D.

Vi ser på eit eksempel.

Eksempel 3.6 *Systemet*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, \\ \dot{y} &= -x + \epsilon\, x\, y\,, \end{aligned}$$

har likevektspunkt i $(0,0)$*. Ved å eliminera* t *ved å dividera likningane på kvarandre, finn ein den separable likninga*

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{\epsilon y - 1}{y}$$

som har integralet

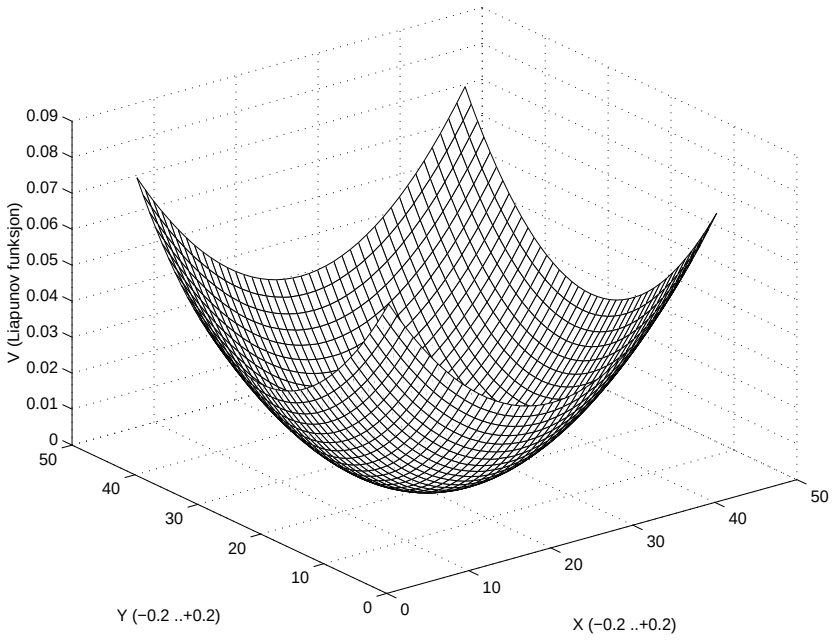
$$x^2 - \frac{2}{\epsilon}(y + \frac{1}{\epsilon}\ln|1 - \epsilon y|) \stackrel{def}{=} V(x,y) = \text{konstant}\,.$$

Banane, trajektoriane, som er løysingskurvene, er difor gitt som nivåkurvene til $V(x, y)$.

Nær likevektspunktet $(0, 0)$ *kan ein rekkje-utvikla og finn*

$$V(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2\epsilon}{3}y^3 + \mathcal{O}(\epsilon^2 y^4).$$

Dette syner at det finst ein omeign om origo der $V(x, y)$ *er positiv definit. Då vi også har* $\dot{V} = 0$*, så er* $V(x, y)$ *ein Liapunov-funksjon slik at Teorema 3.22 og 3.24 garanterer stabilitet av likevektspunktet* $(0, 0)$*. Sjå elles Fig. 4, nedunder:*



Figur 4: *Diagram av Liapunov-funksjonen i eksempel 3.6.*

Teorem 3.26 (Test for ustabilitet) *Utgangspunkt er som i Teorem 3.22*

Dersom det finst ein funksjon $U(\mathbf{x})$ *i ein omeign* $\mathcal{V}^*$ *definert ved* $\|\mathbf{x}\| \leq k$*, med eigenskapane:*

(i) $U(\mathbf{x})$ *er kontinuerleg med kontinuerlege partielle deriverte;*
(ii) $U(\mathbf{0}) = 0$*;*
(iii) $\dot{U}$ *positiv definit i* $\mathcal{V}^*$*;*
(iv) I einkvar omeign om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *finst minst eitt punkt* $\mathbf{x}_0$ *der* $U(\mathbf{x}_0) > 0$*:*
Då er likevektspunktet, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, ustabilt.*

Prov: Frå *(iv)* følgjer det at gitt ein vilkårleg δ slik at $0 < \delta < k$, då finst $\mathbf{x}_\delta$ slik at $0 < \|\mathbf{x}_\delta\| < \delta$ og $U(\mathbf{x}_\delta) > 0$.

Gå ut frå at $\mathbf{x}(\delta, t)$, $t > t_0$ er den løysinga som oppfyller kravet $\mathbf{x}(\delta, t_0) = \mathbf{x}_\delta$. Denne halv-banen kan ikkje gå til origo når $t \to \infty$, sidan $U(\mathbf{0}) = 0$ (frå *(ii)*, på grunn av at $\dot{U}(\mathbf{x}) > 0$ for $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (frå *(iii)*) og U startar ut positiv. Elles er $\dot{U}$ også