

kontinuerleg (frå (i) og regularitets krava for eksistens og eintyde av løysingar). Vi har då at trajektorien (halv-banen) er avgrensa bort frå origo. Det må difor finnast eit tal $m > 0$ slik at

$$\dot{U}(\mathbf{x}(\delta, t)) \geq m > 0, \quad \text{for } t \geq t_0, \quad \text{så lenge } \|\mathbf{x}_\delta\| \leq k. \quad (169)$$

Difor har vi $U(\mathbf{x}(t)) - U(\mathbf{x}(0)) = \int_0^t \dot{U}(\mathbf{x}(s)) ds \Rightarrow U(\mathbf{x}(t)) - U(\mathbf{x}(0)) > m t$. Etter føresetnadene (iv) finst i einkvar omeign om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ minst eitt punkt der $U(\mathbf{x}_\delta(0)) > 0$ slik at $U(\mathbf{x}(t)) > U(\mathbf{x}_\delta(0)) + m t$, som syner $U(\mathbf{x}(t))$ ikkje er avgrensa når $t \rightarrow \infty$. No har ein frå (i) at $U(\mathbf{x})$ er avgrensa for $\|\mathbf{x}\| \leq k$. Det følgjer difor at den aktuelle halvbanen må nå grensa definert ved $\|\mathbf{x}\| = k$.

Det følgjer difor at for ein gitt ϵ , $0 < \epsilon < k$ finst ein δ tilstrekkeleg liten slik at det eksisterer minst ei løysing $\mathbf{x}(\delta, t)$ med $\|\mathbf{x}(\delta, t_0)\| < \delta$, men med $\|\mathbf{x}(\delta, t)\| > \epsilon$ for ein eller annan t . Sagt på ein annan måte, det finst minst ei løysing slik at $\|\mathbf{x}(t)\|$ ikkje kan bli verande innafor ei ϵ -kule når $t \rightarrow \infty$.

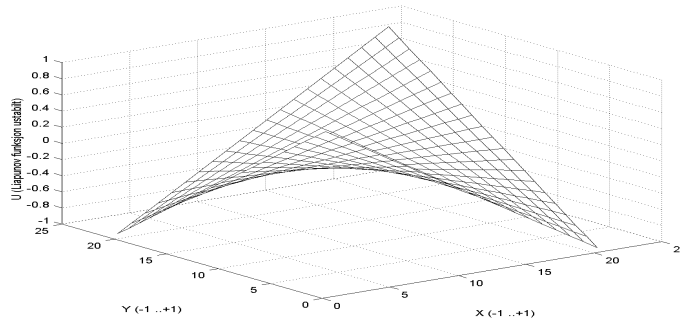
Q.E.D.

Typisk for slike problem er det at $U(\mathbf{x})$ vil ha både positive og negative verdier i nærleiken av $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som funksjonen xy i neste eksempel.

Eksempel 3.7 Gitt

$$\ddot{x} + \dot{x} \sin x - x = 0. \quad (170)$$

Her er, $x = 0$, $\dot{x} = 0$, eit ustabilt likevektspunkt. Det ser ein slik: Det ekvivalente systemet kan skrivast som



Figur 5: Liapunov-funksjon, ustabilitet.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - y \sin x. \end{aligned}$$

Funksjonen $U(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} xy$ har eigenskapane (i), (ii), (iv) i Teorem 3.26 for einkvar ϵ -omeigen om $(x, y) = (0, 0)$ (sjå Fig. 5). Vidare er

$$\dot{U}(x, y) = \dot{x}y + x\dot{y} = y^2 + x^2 - xy \sin x. \quad (171)$$

Denne funksjonen kan ein visa har eit minimum i $(x, y) = (0, 0)$, og er difor positiv definit i ein omeign av origo (det let seg lettast visa ved å innføra polarkoordinatar). Alle krav til $U(x, y)$ under Teorem 3.26 er difor oppfylt, og systemet er ustabilt.

3.10 Stabilitet av den lineære approksimasjonen

Vi skal studere ein viss klasse ikkje-lineære system gitt ved det n -ordens ikkje-lineære autonome systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (172)$$

slik at dette systemet har ein lineær approksimasjon nær origo som er

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (173)$$

Vi vil no finna vilkåra for at denne lineære approksimasjonen likn. (173), gir informasjon om det ikkje-lineære systemet likn. (172).

For å gjennomføra denne drøftinga, treng ein utvida matrise-omgrepet til å omfatta eksponentialfunksjonen av eit argument som er ei matrise. Dette let seg gjere ved følgjande definisjon

$$e^{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots, \quad (174)$$

der $\mathbf{A}$ er ei kvadratisk matrise ($n \times n$). Lat normen av ei matrise vere definert som

$$\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j} |A_{ij}|. \quad (175)$$

Vi har då at

$$\|\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^r}{r!}\| \leq \|\mathbf{I}\| + \frac{\|\mathbf{A}\|}{1!} + \frac{\|\mathbf{A}\|^2}{2!} + \dots + \frac{\|\mathbf{A}\|^r}{r!}. \quad (176)$$

Dersom $\|\mathbf{A}\| \leq q$, så har ein

$$\|\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^r}{r!}\| \leq n + \frac{q}{1!} + \frac{q^2}{2!} + \dots + \frac{q^r}{r!}. \quad (177)$$

Når ein samanliknar dette med rekkja for e^q , ser ein at at høgresida konvergerer for alle q når $r \rightarrow \infty$.

Det let seg gjere å visa følgjande ut frå definisjonen, likn. (174):

1. $\|e^{\mathbf{A}}\| \leq e^{\|\mathbf{A}\|}$.
2. $e^{\phi} = \mathbf{I}$, der $\mathbf{I}$ er einingsmatrisa og ϕ er nullmatrisa.

3. $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ når $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
4. $e^{-\mathbf{A}} = (e^{\mathbf{A}})^{-1}$, dette følger frå (2) og (3). Merk at $e^{\pm\mathbf{A}}$ er ikkje-singulær.
5. $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$, dette finn ein lett frå rekkjerepresentasjonen.
6. $(e^{\mathbf{A}t})^t = e^{\mathbf{A}^t t}$ (transponering).
7. Lat eigenverda til $\mathbf{A}$ vere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Då har ein at for vilkårleg γ , slik at $\gamma > \max_{1 \leq i \leq n}(\lambda_i)$, finst det ein konstant $c > 0$ slik at $\|e^{\mathbf{A}t}\| < ce^{\gamma t}$.
8. Eksponentialfunksjonen er ein rasjonell måte å skriva løysinga for systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ på. Nemleg $\mathbf{x} = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}$ der $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ og $e^{\mathbf{A}t}$ er ei fundamentalmatrise for systemet, sidan denne matrisa er ikkje-singulær. (Sjå også Apostol Vol II teorema 7.8 - 7.10).

Vi skal først gå ut frå at løysingane til likn. (173) er asymptotisk stabile. Det er ekvivalent med at for eigenverda til $\mathbf{A}$ gjeld det at $\Re\lambda_i < 0$ for alle i . Vi vil prøva å konstruere ein Liapunov-funksjon for dette tilfellet med følgjande kvadratiske form:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (178)$$

For at dette skal tena som ein Liapunovfunksjon, må $V(\mathbf{x})$ vere positiv definit, med ein derivert (langs trajektorien) som er negativ definit. Vi finn

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{x}. \quad (179)$$

Vi vil freiste å finna ein $\mathbf{K}$ slik at

$$\mathbf{A}^t \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} = -\mathbf{I}. \quad (180)$$

Ein slik $\mathbf{K}$ vil i tilfelle garantere at $\dot{V}$ er negativ definit. Vi ser på produktet $e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t}$, og deriverer dette

$$\frac{d}{dt}\{e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t}\} = \mathbf{A}^t e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} + e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}. \quad (181)$$

Frå (7) og (8) har ein no at

$$\|e^{\mathbf{A}t}\| \leq ce^{\gamma t}, \quad \text{der } c > 0 \quad \gamma < 0. \quad (182)$$

fordi systemet i utgangspunktet var asymptotisk stabilt. Då eigenverda av $\mathbf{A}$ og $\mathbf{A}^t$ er dei same, så har ein også at

$$\|e^{\mathbf{A}^t t}\| \leq ce^{\gamma t}, \quad \text{der } c > 0 \quad \gamma < 0. \quad (183)$$

Ved integrasjon av likn. (181) finn ein

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\{e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t}\} dt = \mathbf{A}^t \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} dt + \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{A}. \quad (184)$$

Her har ein under dei gitte føresetnadene at $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} = 0$ og $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$, slik at likn. (184) gir

$$-\mathbf{I} = \mathbf{A}^t \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A} t} dt + \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A} t} dt \mathbf{A}. \quad (185)$$

Samanliknar ein dette resultatet med likn. (180), ser ein at eit val kan vere

$$K = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A} t} dt, \quad (186)$$

og vi har

$$V(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^t e^{\mathbf{A}^t \tau})(e^{\mathbf{A} \tau} \mathbf{x}) d\tau, \quad (187)$$

der ein har at $V(\mathbf{x})$ er ei positiv definit form (under integraleiknet har ein skalarproduktet av ein vektor med seg sjølv). Meir direkte kan ein sjå dette slik: I det siste integralet representerer ein fundamental-matrisa, $\exp(\mathbf{A} t) = \Phi(t)$, på diagonal form, då vert diagonalelementa i $\Phi(t)$ like $\exp(\lambda_i t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, slik at $\Phi(0) = \mathbf{I}$ og $\Phi(\infty) = \mathbf{0}$, sidan alle eigenverdiar har negativ realdel. I tilfelle vi har ein kompleks $\lambda_i = -\gamma_i \pm i\phi_i$, må ein også representere den tilsvarande komponenten x_i som ein kompleks vektor-komponent, $x_i = \alpha_i \pm i\beta_i$, slik at når ein summerer vil dette gi ledd av typen

$$(\alpha_i^2 + \beta_i^2) \frac{2|\gamma_i|}{\gamma_i^2 + \phi_i^2}. \quad (188)$$

For reelle λ_i er det berre å setja β_i og ϕ_i lik null i likn. (188). Slik kan ein visa at $V(\mathbf{x})$ er ei positiv definit form på denne måten også.

For $\dot{V}(\mathbf{x})$ gjeld det som ein del av konstruksjonen at denne er negativ definit, likn. (180). Vi har då, at $V(\mathbf{x})$ er ein Liapunov-funksjon, som etter definisjon 3.2 av Liapunov-stabilitet, syner at systemet er asymptotisk stabilt.

Dette resultatet er i og for seg ikkje serleg interessant sidan svaret i utgangspunktet var gitt.

Det som er interessant er at dette kan brukast til å visa følgjande teorem:

Teorem 3.27 *Gitt systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$, der:*

1. $\mathbf{A}$ er ei konstant matrise som definerer eit regulært system der eigenverdiar λ_i er ulike og har $\Re \lambda_i < 0$ for alle i . Det vil seie at $\mathbf{0}$ -løysinga er asymptotisk stabil for systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

2.

$$\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (189)$$

Då er $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ for $t > t_0$ for vilkårlig t_0 ei asymptotisk stabil løysing av systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}). \quad (190)$$

Prov: Dette teoretet kan visast med utgangspunkt i Liapunov-funksjonen

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} \quad \text{der} \quad \mathbf{K} \stackrel{def}{=} \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^t t} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (191)$$

Punkt (1) i teoremet medfører at $V(\mathbf{x})$ er positiv definit. Vidare har ein

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^t \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{h}^t \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{h} \\ &= -\mathbf{x}^t \mathbf{x} + 2\mathbf{h}^t \mathbf{K} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Ut frå føresetnaden i pkt. (2) i teoremet, kan siste leddet i likninga ovanfor gjerast så liten at forteiknet er bestemt av første leddet. Altså vert forteiknet for $\dot{V}(\mathbf{x})$, for $\|\mathbf{x}\|$ liten nok, negativt i ein omeign om origo, og $V(\mathbf{x})$ er ein Liapunov-funksjon som viser at det ikkje-lineære systemet gitt ved likn. (190), er asymptotisk stabilt. Vi overlet til lesaren og gjennomføre det stringente ϵ, δ resonnementet som gir denne konklusjonen.

Dette teoremet kan lett generaliserast til tilfellet $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ v.h.a. Gronwall-lemmat, **3.15**. Sjå [2]. Q.E.D.

Tilsvarande til dette teoremet har ein også eit teorem for ustabilitet.

Teorem 3.28 *Dersom $\mathbf{A}$ er konstant, og*

1. $\mathbf{A}$ har ikkje samanfallande eigenverde, ingen er null, og minst ein eigenverdi har positiv realdel;

2.

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (192)$$

Då har ein at $\mathbf{0}$ -løysinga til det regulære systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (193)$$

er ustabil.

Provet for dette teoremet tek vi ikkje med her.

3.11 Attraktorar

Visse typar dynamiske system (likn. (79) har den eigenskapen at alla løysingane i eit område av faseromet nærmar seg ei undermengd av faseromet. For det todimensjonale tilfellet kan det vere eit punkt eller ei kurve. Frå den elementære teorien (M 117 [7]) har ein t.d. situasjonen med ein stabil *node* og ein stabil *limit syklus* som i båe tilfelle er eksempel på ein *attraktor*

Definisjon 3.10 (Attraktor) *Ein attraktor, A , for systemet*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

er ei undermengd, A , av det tilhøyrande faseromet F . Der A har ein dimensjon som er minst ein lågare enn dimensjonen på F . Alle løysingane i eit område $U \subset F$ har A som grense når $t \rightarrow \infty$.

I eit konservativt system ($\nabla \cdot \mathbf{X} = 0$) kan ein ikkje ha *attraktorar* sidan rørsle er slik at straumlinene for rørsle bevarer volum under rørsle. Men dersom dette ikkje er tilfelle, ($\nabla \cdot \mathbf{X} \neq 0$), så kan ein ha at straumlinene (banane) endar opp

på ei undermengd av faseromet F med lågare dimensjon enn F har. Ein stabil *node* kan ein også karakterisera som eit *asymptotisk stabilt* likevektspunkt. Alle halv-banar som startar nær nok eit slikt punkt endar opp i likevektspunktet. Men merk at likevektspunktet normalt ikkje er ein del av banen, det er grensepunktet for banen når $t \rightarrow \infty$.

Eksempel 3.8 Vis at dersom likevektspunktet $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, er asymptotisk stabilt, må det finnast ein omeign om origo der $\nabla \cdot \mathbf{X} < 0$.

Dette ser ein slik: Det tilsvarande lineariserte problemet kan formulerast som

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \nabla \mathbf{X}|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^t \cdot \boldsymbol{\xi},$$

der $\boldsymbol{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$. Går ut frå at vi har løysingar $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 \exp(\lambda t)$ som gir følgjande eigen-verdi problem

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \cdots \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \lambda & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

eller

$$(-\lambda)^n + (\nabla \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^t)(-\lambda)^{n-1} + \cdots = 0$$

ved å drøfta tilfella n odde og jamn ($n = 2m$ og $n = 2m + 1$) finn ein i baa tilfelle likninga

$$(\lambda)^n - (\nabla \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^t)(\lambda)^{n-1} + \cdots = 0$$

og det følgjer at $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \Re \lambda_1 + \Re \lambda_2 + \cdots + \Re \lambda_n = \nabla \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^t$. (Merk at dersom ei rot er kompleks, må også den kompleks-konjugerte av denne vere ei rot, slik at imaginærdelen av røtene fell bort i denne summen). Vi har vidare at asymptotisk stabilitet krev at $\Re \lambda_i < 0$ for alle i som medfører at $\nabla \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}^t < 0$.

For system med dimensjon to har ein Poincaré - Bendixson teoremet, **3.6**, som seier noko om kva slags attraktorar som er mogelege.

Vi har difor at for to-dimensjonale system finst det berre to typar attraktorar: Eit asymptotisk stabilt likevektspunkt, dimensjon 0, eller ein lukka bane, grense-syklus, som har dimensjon 1.

Eksempel 3.9 (Grense-syklus) Vi skal sjå på ei likning som gjerne vert kalla van der Pol oscillator.

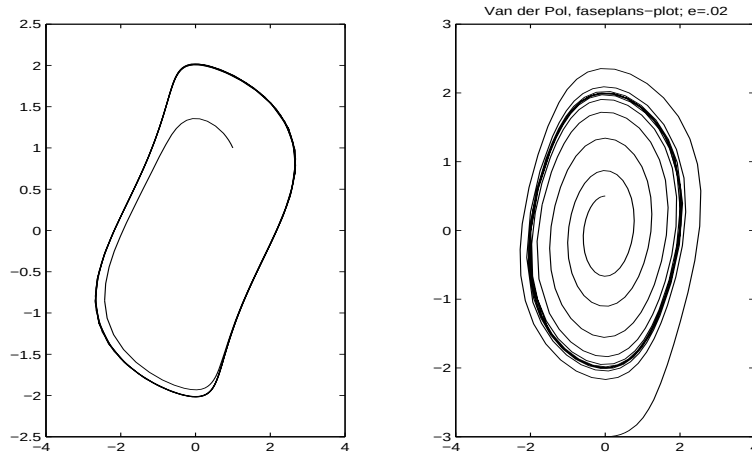
$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \text{der } e > 0. \quad (194)$$

Formulert som system har ein

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -e y (x^2 - 1) - x. \end{aligned}$$

Det følgjer at $\nabla \cdot \mathbf{X} = -e(x^2 - 1)$ slik at $|x|^2 > 1 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{X} < 0$ og $|x|^2 < 1 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{X} > 0$.

Frå det vi lærde i eksempel 3.1 har ein at ein eventuell grense-syklus må kryssa minst ei av linene $x = 1$ eller $x = -1$ i faseplanet, elles vil $\nabla \cdot \mathbf{X}$ ha eit fast forteikn og ein kan ikkje ha lukka banar. Vi har studert dette systemet numerisk i Fig. 6, for to verdier av parameteren e i likn. (194).



Figur 6: Grense-syklus van der Pool oscillator.

Eksempel 3.10 Gitt følgjande system

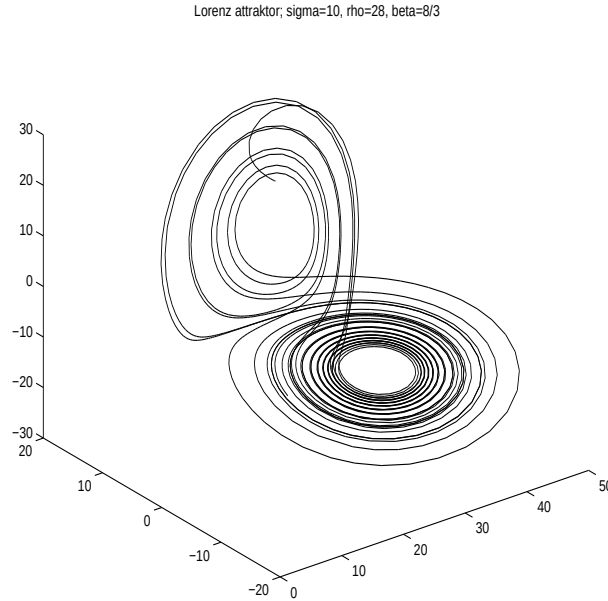
$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - r^2)x, \\ \dot{y} &= (1 - r^2)y, \\ \dot{z} &= (1 - r^2)z,\end{aligned}\tag{195}$$

der $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Multipliserer vi desse likningane skiftevis med x , y , z og adderer dei, så får ein

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2r^2(1 - r^2).\tag{196}$$

Denne likninga syner at alle banar må enda på einingskuleflata, $r = 1$. Dette er fordi $r > 1$ medfører at r avtar, og $r < 1$ medfører at r aukar. Frå likningssystemet (195) finn ein også at $(dx : dy : dz) = (x : y : z)$, som betyr at banane er rette linestykke som nærmar seg kuleflata $r = 1$, for $t \rightarrow \infty$. Kuleflata $r = 1$, vert difor ein attraktor for systemet. Merk også at $\nabla \cdot \mathbf{X} = 3 - 5r^2$ slik at $\nabla \cdot \mathbf{X}$ skifter forteikn innafor einingskula i samsvar med det vi fann i Eksempel 3.1.

For problem med meir enn to dimensjonar treng det ikkje vere slik at alle banar nær eitt punkt på ein attraktor nærmar seg attraktoren nær dette punktet, men kan gå til ein annan del av attraktoren, slik at attraktorar som undermengder i faseromet kan få ein svært komplisert struktur, og dei må i kompliserte tilfelle nærmast bli karkterisert som mengder av Cantor's type, noko vi skal koma attende til.



Figur 7: Lorenz - modellen.

Eksempel 3.11 *Lorenz i 1963 studerte ein forenkla modell for konveksjon i atmosfæren som gav følgjande ikkje-lineære system*

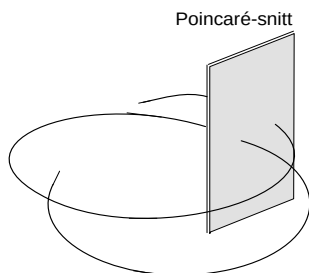
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta x + yz, \\ \dot{y} &= \sigma(z - y), \\ \dot{z} &= \rho y - z - xy,\end{aligned}\tag{197}$$

der β , σ og ρ er positive konstantar. Lorentz vart mykje overraska då han fann ut at løysingane i visse område oppførte seg kaotisk. I Fig. 7 ser ein eit numerisk resultat. Elles syner ein til “demo” under førelesingane.

3.12 Poincaré-snitt

Ikkje lineære dynamiske system har kompliserte løysingskurver, trajektoriar. Ein måte å gripa fatt i problemet på går ut på å redusera informasjonen som ligg i ei komplett løysingskurve i eit gitt tidsrom ved å leggja inn snitt (flater eller plan i eit tredimensjonalt løysingsrom). Og så merkar ein av kvar løysingskurva skjer planet kvar gong det hender, slik som vist skjematisk i Fig. 8

For å få meir detaljert informasjon kan ein leggja inn fleire snitt. Dersom rørsla har ein periodisk karakter, kan ein leggja inn snitt ved start, etter ein kvart periode, etter ein halv periode o. s. b. Det er dette som er gjort i Fig. 9 og ein kan der følgja evolusjonen frå snitt til snitt: $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{5}$, $t = \frac{\pi}{5}$ På den måten kan ein få god informasjon om systemet utan å bli nedlessa av detaljar. Vi merkar oss at dei punktmengdene som er genererte i desse snitta har ein uvanleg struktur, men også at dei er korrelerte i ein viss forstand. Vi skal koma tilbake til slike strukturar seinare. Det vi skal merka oss i Fig. 9 er at det



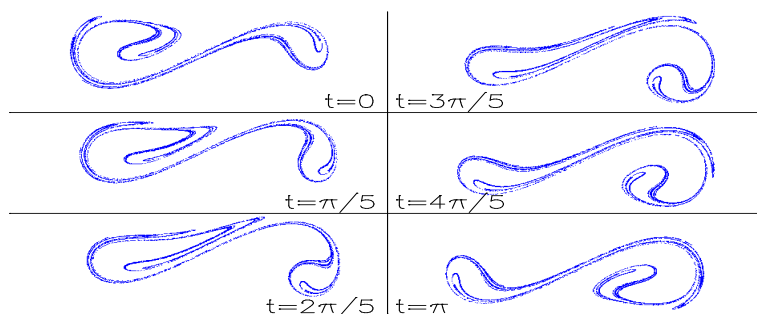
Figur 8: Poincaré-snitt eller returavbildning med eitt snitt

er ei viss punktmengde i faseromet som er preferert. Denne punktmengda har ein struktur og er ikkje smurtt tilfeldig utover. Ein slik strange eller "underlegss-struktur som fangar opp eller tiltrekkjer seg rørsla til eit system over lang tid kallar vi som nemnt ein *strange* eller *underleg* attraktor.

Eksempel 3.12 *Eit kjend og kjær likning i ikkje-lineær samanheng er Duffing si likning*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} - \frac{1}{6} \omega_0^2 x^3 = F \cos \omega t, \quad (198)$$

der vi har eit driv-ledd $F \cos \omega t$. Denne likninga er den ein får om ein tek pendellikninga likn. (100) og utviklar sinusfunksjonen i ei Taylor-rekkje der ein tek med ledd til tredje orden. I Fig. 9 har ein teke stroboskopiske Poincaré-snitt av løysingar til denne likninga. Dette er eit typisk eksempel på det ein kallar ein "strange"⁷ attraktor.



Figur 9: Duffing si likning med eit drivledd. Plottet syner det ein kallar ein **strange attraktor**. Plottet er stroboskopisk og ein merkar tydeleg strekkjing og falding av attraktoren. Figuren er produsert av **Dynamics Solver f32**.

⁷Strange er eit engelsk ord som tyder noko i retning av uvanleg, underleg, merkeleg, frammandvare og ukjent. Det er vanskeleg å finna eit godt norsk ord som dekkar dette. Tek gjerne mot forslag. Elles kjem vi til å bruka den engelske termen som etter kvart er godt innarbeidd i internasjonal samanheng.

4 Universelle ikkje-lineære prosessar

I naturen fins der mange typar prosessar. Det ein hittil har vore mest oppteken av er dei prosessane som skjer i ordna former, så som planetrørslene i makrokosmos, atomere prosessar i mikrokosmos, i heile den rasjonelle mekanikken, i størstedelen av hydrodynamikken og plasmadynamikken og elles i naturvitenskapen er det dei ordna regelbundne prosessane som har vore dei mest aktuelle studieobjekta. Eit unntak er hydrodynamikken der ein nokså tidleg møtte det problem-komplekset som kallast turbulens. Trass i iherdig innsats gjennom lang tid, er utvikling av turbulens noko ein veit lite om. Etter kvart har ein erkjent at slike prosessar er både viktige og interessante frå modellerings-synspunkt. Meir kunnskap her er nødvendige for å få betre innsyn og forståing av viktige sider av prosessar i naturvitenskapen.

Det meste av den teknologien som er utvikla har sin basis i ordna prosessar. Til dømes bilar, fly, radio, fjernsyn og moderne datamaskiner er alle eksempel på system som er bygde over komponentar som oppfører seg regelbunde, ein kan gjerne seie lovmessig. Det vil seie at slik system oppfører seg på ein måte som er slik at ein veit kva som vil skje når dei vert påverka. Av og til kan det nok hende at slike system bryt saman og skapar kaos også, men det er unntaket.

I naturen finst det ein annan type prosessar, dei uordna, katotisk prosessane. Som nemt er turbulent væskerørsle (fossen i ei elv) eit typisk eksempel på slike prosessar. Den brå overgangen frå laminær til turbulent strøyming kan ein studera lett i elvar med fossestryk. Atmosfæren med vind og ver, stormar og orkanar vil ofte vere turbulent. Overgangen frå laminar til turbulent strøyming har lenge vore eit interessant tema i hydrodynamikk. Den innsikt i evolusjonen mot uordna, kaotisk rørsle som kom med arbeid, særleg av Mitchell J. Feigenbaum [8], i slutten på 70-åra og starten av 80-åra, gav opphav til intens forskning i dette feltet dei siste 20 åra. Det heile starta vel litt tilfeldig ved at Feigenbaum oppdaga ved iterasjon på lommekalkulatoren noko som seinare viste seg å vere ein universell konstant. Feigenbaum oppdaga også at ein prosess som gjerne kallast *periode-dobling* kunne vere ein aktuell forklarings-modell for utvikling av kaotiske prosessar i ei rekkje dynamiske system. I det følgjande skal vi gje ei framstilling som i store trekk følgjer Feigenbaum sitt arbeid[8].

4.1 Periode-dobling

Kva er så *periode-dobling*? For det første er dette ein ikkje-lineær prosess. Der-som eit system får eksitert ei periodisk rørsle, så er det gjerne slik at for visse verdiar av dei ytre parameterane som karakteriserer systemet (kan t.d. vere temperatur), kan ein ha ei periodisk rørsle. Systemet kjem tilbake til utgangspunktet etter ei viss tid T , perioden, for så å starta på nytt. Når parameterar i systemet varierer, kan det skje at den periodiske rørsla ikkje lenger er mogeleg, berre nesten. Og då kan det også skje at det trengs to periodar, $2T$, for at systemet reproducerer seg sjølv. Dette gjentar seg og systemet treng $4T$ for å reproducere seg sjølv. Slik held det fram kontinuerleg til n -perioden vert $2^n T$, der endring i parameterområdet som trengs for periodedobling vert mindre og mindre etter som n aukar. Prosessen går i metning når ein når den parameterverdien der $n \rightarrow \infty$. Rørsla er då ikkje lenger periodisk, men går over frå ei periodisk rørsle til ei a-periodisk rørsle. Slik kan periode-dobling vere ein karakteristisk veg for systemet å utvikla seg frå periodisk rørsle over i ei komplisert aperiodisk rørsle.

Ein har etter kvart kartlagt mange fenomen som følgjer ei slik utvikling innafor område som: Væskerørsle, populasjons-dynamikk, mekaniske-, elektriske- og kjemiske svingesystem. Det finst også støtte for at Hamiltonske-system - dei som ein har i klassisk mekanikk, som t.d. rørsle i solsystemet, kan ha ein slik oppførsel.

Det syner seg at i grensa der den parameteren som styrer systemet har nådd den verdien som gjer at perioden går mot ∞ , då finst det ei *universell* løysing som er felles for alle system som undergår periodedobling.

Dette faktum har ein oppsikts-vekkjande konsekvens. Dersom vi for eit gitt system namngir den styrande parameteren sin verdi med Λ_n , når vi har nådd den n -te perioden, så finn ein altså at Λ_n konvergerer mot Λ_∞ (der rørsle vert aperiodisk). Og dette skjer *geometrisk* for store n , altså har ein

$$\Lambda_\infty - \Lambda_n \sim \delta^{-n}, \quad (199)$$

for ein fast verdi av δ (som er eit mål for raten for utvikling mot den komplekse oppførslen) når n vert stor. Sagt på ein annan måte, dersom ein definerer δ_n som

$$\delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad (200)$$

så vil δ_n nærmar seg raskt mot ein konstant verdi $\delta = 4,6692016\dots$, (typisk er det slik at ein treng berre nokre få periode-doblingar for å finna δ korrekt med fleire siffer).

Det er slik at for system som har denne mekanismen med periodedobling innebygd, så finst det altså ein *predeterimert universell* konstant

$$\delta = 4,6692016\dots$$

Dette bestemte talet δ , finst som eit naturleg mål for *vekst* – *raten* for utvikling mot aperiodisk rørsle for visse typar oscillatorar, populasjonsdynamiske system, væsker og stutt sagt alle system som har mekanismen med periode-dobling innebygd!

Vi har altså at dersom eit system har innebygd mekanismen med periode-dobling, så kan ein gjere generelle utsagn om korleis prosessen vil gå, og finne kvalitative mål for utvikling av turbulens. Faktum er at dei fleste eigenskapar som kan målast i slike system kan no finnast i den aperiodiske grensa. Og dette kan skje på ein måte som i det vesentlege ikkje krev detalj-kunnskap om dei likningane som styrer systemet. Det er slik at så lenge systemet har visse **kvalitative** eigenskapar som tillet denne utviklinga mot kompleksitet, så er systemet sine **kvantitative** eigenskapar bestemte⁸. Det er difor tilstrekkeleg for å få innsikt i dette fenomenet at ein studerer det enklaste systemet som har denne mekanismen innebygd, den *logistiske avbildinga*⁹.

Men før vi går i gang med denne, skal vi sjå litt på funksjonell iterasjon.

⁸Dette resultatet er fenomenologisk sett nær i slekt med fenomen ein finn i samband med faseovergangar. I bae teoriane er det, på det formelle planet, tale om *fiks-punkt* teoriar og sett slik er dei identiske, der talet δ , kan sjåst som ein kritisk eksponent.

⁹Namnet daterer her tilbake til P. F. Verhulst (1804 - 1849) som var ein Begisk matematikar. Sjå elles [7] under avsnittet: *Population Dynamics and Some Related Problems* for meir kommentarar om dette.

4.1.1 Funksjonell iterasjon

Slumptals-generatorar er eit eksempel på eit enkelt iterasjons-skjema som har kompleks oppførsel. Eit slikt skjema genererer det neste *pseudo-slumptalet*¹⁰ ved hjelp av ein bestemt transformasjon med utgangspunkt i det eksisterande *pseudo-slumptalet*. Med andre ord har ein at ein viss funksjon er utrekna på ny om att og om att slik at ein på den måten produserer ei *følgje* av slike tal. Altså, dersom f er funksjonen og x_0 er talet ein startar med (eller “frøet”), så får ein $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, der

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{201}$$

er følgja av genererte pseudo-slumptal. Det vil seie at dei er genererte ved *funksjonell* iterasjon, der det n -te elementet i iterasjonen vert

$$x_n = f(f(\dots f(f(x_0)) \dots)) \stackrel{\text{def}}{=} f^n(x_0), \tag{202}$$

merk at n er talet på gonger som f opererer på sitt argument slik at $f^n(x)$ er her ikkje ein potens, men den n -te itererte av f . Den itererte har denne eigenskapen

$$f^n(f^m(x)) = f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x), \quad f^0(x) \stackrel{\text{def}}{=} x. \tag{203}$$

Det kan også vere nyttig å bruka *komposisjons* symbolet $\circ$ slik at ein kan skriva

$$f^n \circ f^m = f^m \circ f^n = f^{m+n}, \tag{204}$$

Vi har at f^n i likn. (202) er ein kjend funksjon som ein kan rekna ut. Difor kjenner ein i prinsippet x_n når x_0 er kjend.

Dersom f for eksempel er lineær, $f(x) = ax$ for ein konstant a , så finn ein lett

$$f^n(x) = a^n x_0,$$

slik at for denne f har ein

$$x_n = a^n x_0,$$

som løysing av rekursjonsformelen (201) $x_{n+1} = ax_n$. Dersom $a < 1$ vil x_n konvergere geometrisk mot null med raten $\frac{1}{a}$. Dette eksemplet er likevel spesielt på den måten at ein lett eksplisitt kan rekna ut f^n . For å generera ei følgje av pseudo-slumptal, må ein velja funksjonen f *ikkje-lineær* t. d.

¹⁰pseudo-slumptal vert her brukt for å peike på eit fundamentalt problem når det gjeld omgrepet *slump-tal* eller tilfeldige tal. Når ein brukar ein reknemaskin til å generera slike tal vert det ikkje tilfeldig i streng meining, fordi prosessen ein brukar til å generera dessa tala kan reproduserast. Men for alle praktiske førmål kan ein sjå på slike tal som tilfeldige.

$$f(x) = a - x^2. \quad (205)$$

I dette tilfellet vert $f^n(x)$ eit polynom av grad 2^n , d. v. s. at dette polynomet raskt vert så omfattande at det vanskeleg let seg handtere i praksis. Vidare vert koeffisientane polynom i a , av grad opp til a^{n-1} og er difor av same vanskegrad. Det vi lærer av dette, er at ved å anvenda dei enklaste ikkje-lineære iterasjon-skjema på seg sjølv mange nok gonger, så kan ein få enormt komplisert oppførsel. Likevel, nettopp fordi den same operasjonen vert brukt om att og om att, er det likevel tenkjeleg at nokre få sjølvkonsistente mønster kan oppstå der konsistensen er bestemt av at ein vel rett utgangspunkt og ikkje av det spesielle iterasjons-skjemaet ein brukar. Desse sjølv-konsistente mønstera oppstår t. d. ved periodedobling i grensetilfellet når perioden går mot uendeleg. Det kan vere eit sers innvikla mønster som vert produsert på denne måten, og dette kan bestemmast *a priori*, endå systemet er svært komplekst.

4.1.2 Fiks-punkt oppførsel under funksjonell iterasjon

Lat oss gå rett på likn. (205) for å finna ut kva den inneheld. Vi er på jakt etter oppførselen til systemet etter mange iterasjonar. Vi veit alt at høge iterasjonar vert raskt svært kompliserte. Ein måte ein kan unngå dette på, er at første iterasjonen av x_0 er nøyaktig x_0 sjølv. Generelt sett kan dette vere uråd, men finst det slike punkt som er sjølv-reproduserande, så kallar vi dei for *fiks-punkt* til f . Følgja av iterasjonar vert då $x_0, x_0, x_0, \dots$ slik at oppførselen er statisk, ein flyttar seg ikkje. Og sett som eit periodisk system har ein periode 1.

Det er elementært å bestemma fikspunktet i likn. (205). Med omsyn til det vi seinare skal sjå på, skal vi bruka ei modifisert form av likn. (205) som ein får ved ein translasjon i x og ein omdefinering av parameterar slik at vi endar opp med den *logistiske* likninga (sjå fotnote 9) på forma

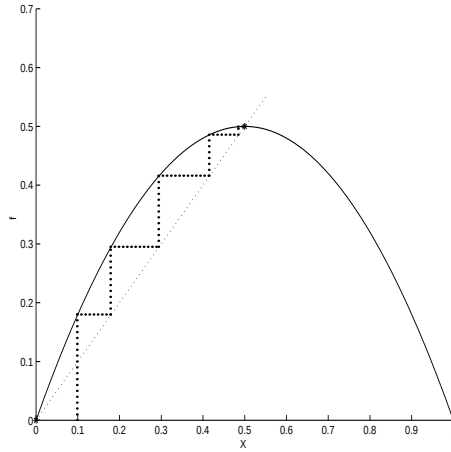
$$f(x) = 4\lambda x(1 - x). \quad (206)$$

Vi merkar oss at når λ varierer, så er $x = 0$ eit fikspunkt uavhengig av λ . Men likninga for fikspunkta x^* gir to fiks-punkt

$$x^* = f(x^*) = 4\lambda x^*(1 - x^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = 0, \quad x_0^* = 1 - \frac{1}{4\lambda}. \quad (207)$$

Maksimums-verdien for $f(x)$ i likn. (206) får ein for $x = \frac{1}{2}$, og denne er lik λ . Vi merkar oss at for $\lambda > 0$ og $x \in [0, 1]$, så er alltid $f(x) > 0$. Difor, dersom $\lambda \in [0, 1]$, så følgjer det at den itererte, x_n av $x \in [0, 1]$ er også i dette intervallet for vilkårlig n . I det følgjande skal vi difor avgrensa oss til å sjå på x - og λ -verdiar slik at $x \in [0, 1]$, og $\lambda \in [0, 1]$. Frå likn. (207) ser ein at når $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$, så er det berre $x^* = 0$ som er fikspunkt i dette intervallet medan når $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1]$, så er båe fikspunkta med i dette intervallet. Set vi t. d. $\lambda = \frac{1}{2}$ og startar ut med fikspunktet $x_0^* = \frac{1}{2}$ (d.v.s. vi startar med $x_0 = \frac{1}{2}$ som "frø" i iterasjonen) og finn $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$. Tilsvarande finn ein for det andre fikspunktet $x_0 = 0$ at $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, slik at problemet med å rekna ut den itererte er triviellt.

Men kva skjer om vi ikkje vel eit fikspunkt? Lettaste måten å få innsyn i dette på, er å gjere ein grafisk analyse. Vi teiknar grafen til $y = f(x)$ saman med den rette lina $y = x$.



Figur 10: Feigenbaum plot for den logistiske likninga. Den itererte av $x_0 = 0,1$ for $\lambda = \frac{1}{2}$.

Der kurvene skjer kvarandre i Fig. 10, har vi $x = y = f(x)$, slik at skjeringspunkta er nettopp fikspunkta. Dersom vi no startar ut med ein x_0 (t.d. $x_0 = 0,1$) som vi merker av på x -aksen og går vertikalt til ordinaten $f(x_0)$ som er x_1 . Vidare går vi horisontalt til skjeringa med lina $y = x$ og då er vi i $x = x_1$, fortset så vertikalt til $f(x_1) = x_2$, slik finn ein den andre itererte x_2 . No er det berre å halda fram denne prosessen som førerer oss til fikspunktet $x^* = \frac{1}{2}$.

Den grafiske iterasjonen har to steg:

1. Gå vertikalt til grafen $f(x)$.
2. Gå horisontalt til grafen $y = x$

Dette repeterer ein til ein når målet dersom prosessen konvergerer.

Fig. 10 viser denne prosessen for $\lambda = \frac{1}{2}$, der dei to fikspunkta er merkte med stjerner.

Frå denne figuren er det innlysande at om ein startar i eit vilkårlig punkt i intervallet $(0,1)$, så vil iterasjonsprosessen føra fram til fikspunktet $x_0^* = \frac{1}{2}$. Merk at same kor nær ein startar fikspunktet i $x = 0$, så divergerer prosessen og endar i fikspunktet $x_0^* = \frac{1}{2}$. Fikspunktet $x = 0$ med denne eigenskapen kallar vi *ustabil*.

På den andre sida har ein at om ein startar nær nok det andre fikspunktet i $x = \frac{1}{2}$ (det inkluderer alle punkt i $(0,1)$), så endar ein opp i dette fikspunktet, som vi difor seier er *stabil*. Eit slikt fikspunkt kallar ein for ein *attraktor* med periode 1.

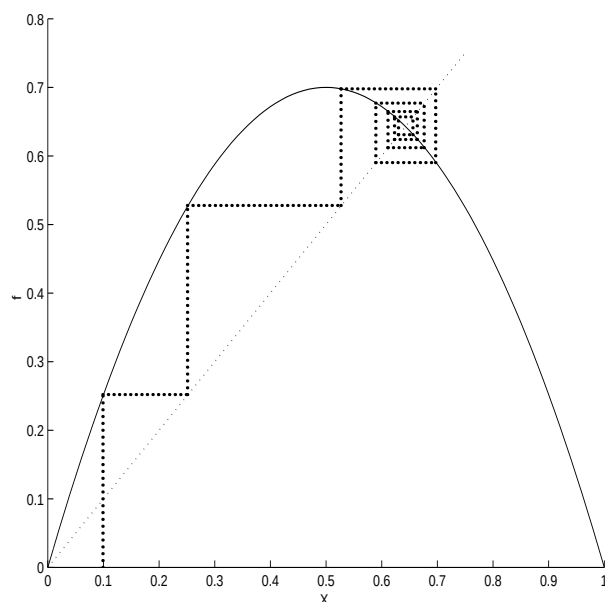
Dersom vi ikkje bryr oss om den transiente oppførselen av iterasjonsprosessen, men berre siktast oss inn mot ein regulær oppførsel som eit eventuelt slutt-resultatet, då vil kunnskap om det stabile fikspunktet, $x = y = \frac{1}{2}$, vere det vi søker som endemålet for iterasjonsprosessen. Med denne form for tilnærming til problemet, så skal vi merka oss at kvar vi enn startar ut, berre vi er rimeleg nær det stabile fikspunktet når vi startar, så vil iterasjonsprosessen føra fram til fikspunktet uavhengig av startpunktet x_0 . Det område som er “nær nok” til at iterasjonsprosessen fører fram til fikspunktet eller *attraktoren*, kallar ein gjerne *attraksjons-området* for attraktoren (fikspunktet). Attraktoren oppfyller

eksplisitt likn. (207), og denne likninga er uavhengig av x_0 .

Dette vilkåret er basis temaet i den universelle oppførselen: Dersom det finst ein *attractor*, så er den eventuelle oppførselen uavhengig av startpunkt.

Kva er det så som gjer $x = 0$ ustabil, men $x = \frac{1}{2}$ stabil? Det skulle ikkje vere så vanskeleg å overtyda seg sjølv om at $x = 0$ er ustabil for di *stigingstalet* til $f(x)$ ($f'(x)$) er større enn 1 i dette punktet. I røynda har ein at dersom x^* er eit fikspunkt for f og den derivate av f evaluert i x^* , $f'(x^*)$ er mindre enn 1, i absolutt-verdi, då er x^* eit stabilt fikspunkt. Dersom $|f'(x^*)| > 1$, så er x^* eit ustabil fikspunkt. Det er også slik at berre stabile fikspunkt kan vere attraktorar for iterasjonsprosessar som startar i eit vilkårleg punkt.

Neste spørsmål vi stiller er: "For kva slag verdier av λ er fikspunkta attraktive? Dette er illustrert grafisk i Fig. 11.



Figur 11: Feigenbaum plot for den logistiske likninga. Den itererte av $x_0 = 0,1$ for $\lambda = 0,7$ (med 10 iterasjonar).

Frå likn. (206) finn ein

$$f'(x) = 4\lambda(1 - 2x) \quad (208)$$

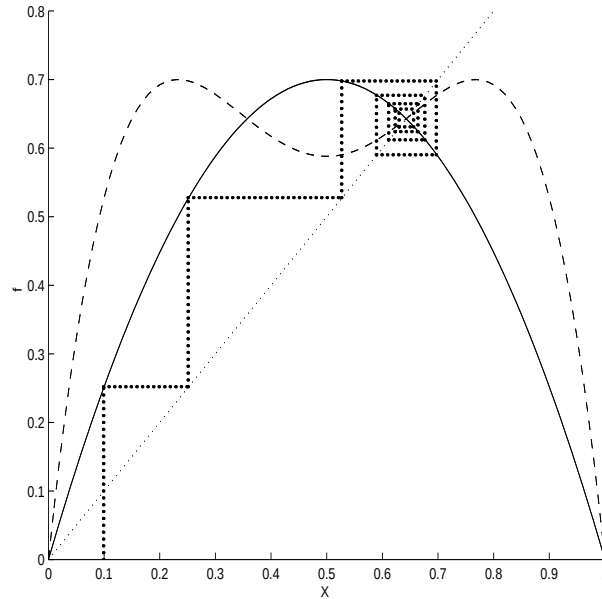
slik at

$$f'(0) = 4\lambda, \quad (209)$$

og med $x_0^* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$, finn ein

$$f'(x_0^*) = 2 - 4\lambda. \quad (210)$$

Vi ser då at for $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ er det berre $x^* = 0$ som er eit stabilt fikspunkt. For $\lambda = \frac{1}{4}$ er $x_0^* = 0$ og $f'(x_0^*) = 1$. For $\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$ er $x^* = 0$ ustabil og x_0^* stabil. Men for $\lambda = \frac{3}{4}$ er $f'(x_0^*) = -1$ og også x_0^* er blitt ustabil. Ut frå dette har ein at i området $0 < \lambda < \frac{3}{4}$ kjenner ein oppførselen til systemet under iterasjonar.



Figur 12: Feigenbaum plot for den logistiske likninga. Den itererte av $x_0 = 0, 1$ for $\lambda = 0, 7$ der kurva med dobbel hump er den andre itererte, $f^2(x)$ (med 10 iterasjonar).

Men kva hender med systemet i området $\frac{3}{4} < \lambda < 1$, når der ikkje er nokon stabile eller *tiltrekkjande* fikspunkt? Vi skal sjå at når λ aukar og blir litt større enn $\frac{3}{4}$, så vil systemet undergå periodedobling. Det vil seie at i staden for å ha ein stabli syklus med periode 1, så får ein svarande til fikspunktet, at systemet får ein stabil syklus med periode 2. Det vil seie at den stabile syklusen inneheld *to* punkt. Og desse to punkta er fikspunkt til f^2 . Sidan stabilitet av desse punkta er bestemt av stigingstalet for f^2 , skal vi fokusera på oppførslen omkring dei to fikspunkta til f^2 .

For å skjøna Fig. 12, er det viktig å merka seg, at sidan f er symmetrisk om maksimums-punktet $x = \frac{1}{2}$, så er også f^2 symmetrisk om dette punktet. Vidar så må f^2 også ha fikspunkt kvar gong f har fikspunkt fordi den andre-itererte av eit fikskunkt er framleis eit fikspunkt. Den viktigaste eigenskapen som bestemmer periodedoblings evolusjonen til f når λ aukar, er tilhøva når det gjeld forholdet mellom stigingstala til f^2 og f . Dette forholdet er bestemt ut frå derivasjon og bruk av kjerneregelen. Vi har

$$x_2 \stackrel{\text{def}}{=} f^2(x_0), \quad (211)$$

der

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1). \quad (212)$$

Ein kan lett verifisera ved bruk av kjerneregelen at

$$f^{2'}(x_0) = f'(x_0)f'(x_1), \quad (213)$$

og

$$f^{n'}(x_0) = f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1}), \quad (214)$$

der notasjonen $f^{n'}$ står for den deriverte av den n -te itererte av f . Dette er eit elementært resultat som bestemmer periode-dobling. Dersom vi startar i eit fikspunkt for f og brukar likn. (213), der vi set $x_0 = x^*$, slik at $x_2 = x_1 = x^*$, då har vi

$$f^{2'}(x^*) = f'(x^*)f'(x^*) = [f'(x^*)]^2. \quad (215)$$

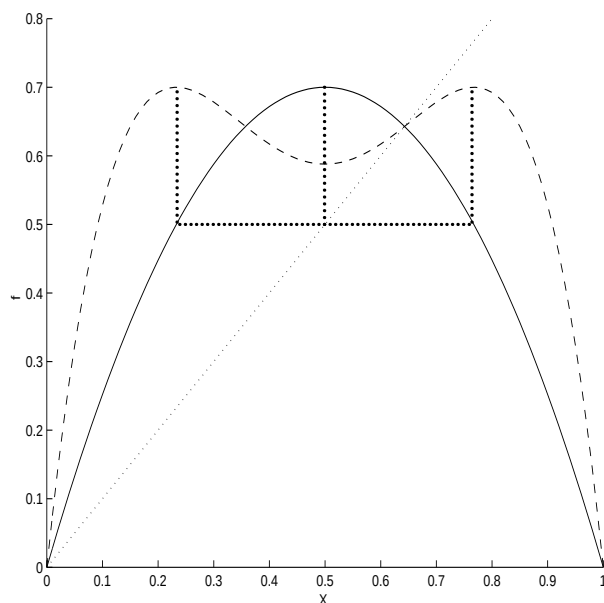
Då vi har for $\lambda = 0,7$ at $|f'(x^*)| < 1$, så følgjer det frå likn. (215) at

$$0 < f^{2'}(x^*) < 1. \quad (216)$$

Ein ser også frå likn. (214) at om vi startar i maksimumspunktet for f , $x_0 = \frac{1}{2}$, så er

$$f^n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (217)$$

for alle n .



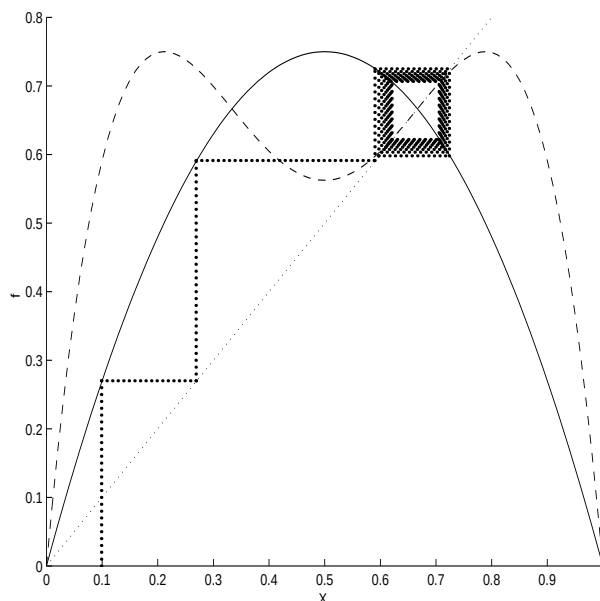
Figur 13: Her er f og f^2 framstelt utan iterasjonar, men med splittinga som skjer p.g.a. at den inverse til f er to-tydig ($\lambda = 0.7$).

Spesielt har ein at f^2 har eit ekstremalpunkt (minimum) i $x = \frac{1}{2}$, og frå likn. (213) ser ein at f^2 har eit ekstremalpunkt (maksimum) i x_0 , som under f vil iterere til $x = \frac{1}{2}$, fordi vi då har $x_1 = \frac{1}{2}$ og $f'(x_1) = 0$. Desse punkta, dei inverse av $x = \frac{1}{2}$ finn ein ved å gå vertikalt nedover langs $x = \frac{1}{2}$ til skjering med lina $y = x$, og så horisontalt til $y = f(x)$. Og då f har eit maksimum, er det to skjeringspunkt. Dette er knytt opp mot dei to maksimumspunkta ein har på den stipla kurva som er grafen til f^2 . Sjå Fig. 12 og 13.

Egenskapen å framstå med kompleks oppførsel er nettopp ein følgje av det faktum at den inverse, $f^{-1}(\frac{1}{2})$, er fleirtydig (i dette tilfellet to verdiar), slik Fig. 13 syner.

Ein monoton f , ein som alltid aukar, har alltid enkel oppførsel, anten oppførselen lett let seg rekne ut eller ikkje (t. d. når f er lineær). Dei f -funksjonane som er interessante i vår samanheng, faldar seg alltid over p. g. a. ikkje-lineariteten. Og det er nettopp denne faldinga av funksjonen p. g. a. ikkje-lineariteten som gir grunnlagt for vår analyse av problemet.

Går vi tilbake til Fig. 12 og ser kva som skjer når $\lambda \rightarrow 0,75$, så er det tydeleg frå Fig. 14 at ein har ekstremt sakte konvergens.



Figur 14: Feigenbaum plot for den logistiske likninga. Den itererte av $x_0 = 0,1$ for $\lambda = 0,75$ (med 20 iterasjonar).

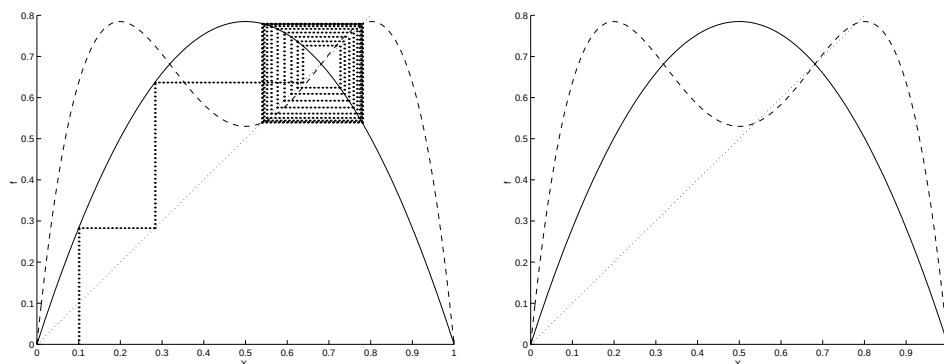
Det går fram av Fig. 12 og Fig. 15 (a) og (b), der λ er skiftevis 0,7 og 0,785, altså litt mindre og litt større enn $\frac{3}{4}$ at iterasjons-prosessen skifter karakter frå å konvergere mot *eitt punkt* til å “konvergere” mot *to punkt*. Medan ein i Fig. 14 har det marginale tilfellet som gir svært sein konvergens. I Fig. 15 (a) merkar vi oss at iterasjonsprosessen konvergerer skiftevis mot ein x_1^* og ein x_2^* som er skjæringspunktane mellom den rette linja $y = x$ og $y = f^2(x)$, slik at vi har fått ei løysing som verkar slik at $f(x_1^*) \rightarrow x_2^*$ og $f(x_2^*) \rightarrow x_1^*$. Eit slikt punktpar kallar ein for *2-periodisk* løysing trass i den endelausa løkkja ein får for iterasjons-prosessen i det ytre kvadratet i Fig. 15 (a). Dette tyder at følgja

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, \quad (218)$$

nærmar seg meir og meir til

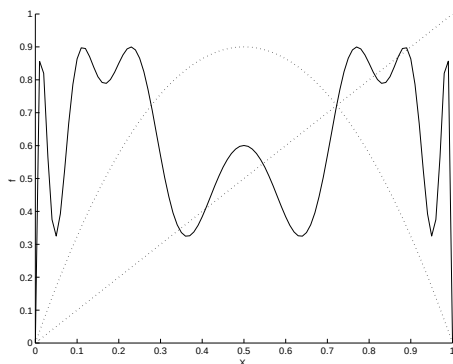
$$x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^*, \dots, \quad (219)$$

slik at dette er ein stabil 2-syklus eller *attraktor* med periode 2.



(a) Med iterasjonar

(b) Uten iterasjonar

(c) Plot av $y = f^4(x)$, $y = f(x)$ og $y = x$.

Figur 15: Feigenbaum plot for den logistiske likninga. Den itererte av $x_0 = 0,1$ for $\lambda = 0,785$ der kurva med dobbel hump er den andre itererte, $f^2(x)$ (med 20 iterasjonar), (a) med iterasjonar og (b) utan. Figuren (b) syner fikspunkta for $f(x)$ og $f^2(x)$ som skjeringa med den prikkete linja $y = x$. I (b) er kurvene for $y = f(x)$ og $y = x$ stipla og $\lambda = 0,9$. Figuren syner fikspunkta for $f(x)$ og $f^4(x)$ som skjeringa med den prikkete linja $y = x$.

Merk også at stigingstalet for $f^2(x)$ er større enn 1, i området omkring fikspunktet for $f(x)$ slik at dette no er eit ustabilt fikspunkt for $f^2(x)$ som er felles for $f(x)$ og $f^2(x)$. Dette syner betre i Fig. 15 (b) som er den same som Fig. 15 (a), men utan iterasjons-prosessen.

Vi har då observert den første periodedoblinga (med referanse til likn. (206)) med aukande parameter λ .

Ei anna sak som er viktig å merke seg, er at f^2 har det same stigingstalet i x_1^* og x_2^* . Dette er ei følge av likn. (213), sidan $x_0 = x_1^*$ og $x_1 = x_2^*$ og vice versa, slik at produkta av stigings-tala vert like. Allment har ein at dersom $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*$, er ein n -syklus slik at

$$x_{r+1}^* = f(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \quad (220)$$

og

$$x_1^* = f(x_n^*), \quad (221)$$

då har ein at kvar x_r^* er eit fikspunkt for f^n med identisk stigingstal:

$$x_r^* = f^n(x_r^*), \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (222)$$

og

$$f^{n'}(x_r^*) = f'(x_1^*) \dots f'(x_n^*). \quad (223)$$

Dette medfører i sin tur periodedobling *ad infinitum*.

Ettersom ein aukar λ vidare, så vil minimum i $x = \frac{1}{2}$ avta ettersom stigingstalet for f^2 svarande til fikspunktet for f aukar. I denne prosessen når ein λ -verdien, λ_1^* , som er slik at $x = x^* = \frac{1}{2}$ vert eit fikspunkt for f^2 . Samstundes vil maksimumspunktet til høgre også bli eit fikspunkt for f^2 . Vi har då at at topp-punktet for $f(x)$ ligg på denne banen, og frå likn. (223) har ein $f^{2'}(x^*) = 0$. Når dette skjer, seier ein at banen er *superstabil*. Superstabile banar finst for dei λ -verdiane som er lista i tabell 1. Eit MAPLE-program for utrekning av dei første λ^* -verda er presentert i Appendiks B.

Vidare finn ein frå formelen for δ_n i likn. (200) ved å bruka dei første 5 λ^* -verdiane i tabell 1, følgjande verdier:

λ^*	=	0,5000000	(superstabil periode -1 bane)
λ^*	=	0,8090170	(superstabil periode -2 bane)
λ^*	=	0,8746404	(superstabil periode -4 bane)
λ^*	=	0,8886602	(superstabil periode -8 bane)
λ^*	=	0,8916667	(superstabil periode -16 bane)
λ^*	=	0,8923110	(superstabil periode -32 bane)
λ^*	=	0,8924482	(superstabil periode -64 bane)
λ^*	=	0,8924782	(superstabil periode -128 bane)
λ^*	=	0,8924847	(superstabil periode -256 bane)

Tabell 1: λ - verdier for superstabile banar.

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\lambda_2^* - \lambda_1^*}{\lambda_3^* - \lambda_2^*} = 4,68075 \\ \delta_2 &= \frac{\lambda_3^* - \lambda_2^*}{\lambda_4^* - \lambda_3^*} = 4,66316 \\ \delta_3 &= \frac{\lambda_4^* - \lambda_3^*}{\lambda_5^* - \lambda_4^*} = 4,66666 \\ \delta &= 4,6692016\dots \quad \text{korrekt verdi.} \end{aligned}$$

I Fig. 15 (c) ser ein kva som skjer vidare når λ aukar og ein får fire fikspunkt for f^4 i tillegg til fikspunktet for f som ein alltid har.

Når λ fortset å auka får ein det bifurkasjons-diagrammet som er presentert i Fig.16 (a) med eit tilsvarende diagram for Liapunov-eksponenten for dette problemet i Fig. 16 (b), der aksane i dei to diagramma skal vere samanfallande. Merk serskilt at Liapunov-eksponenten nærmar seg null frå negativ side i dei to første bifurkasjons-punkta for så å gå over til å bli positiv (ustabil).