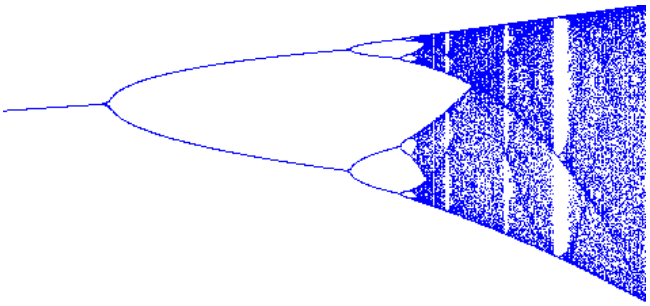
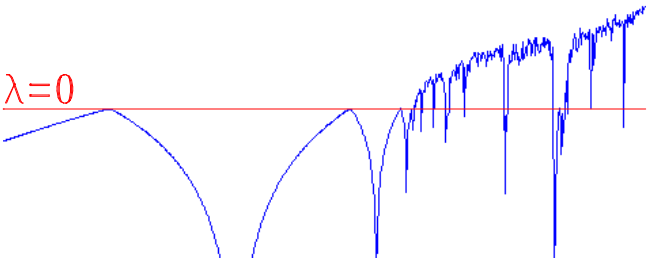
Kvalitativt er det som skjer når λ aukar, at likevektspunkta (fikspunkta) for høgare og høgare itererte kjem inn og produserer periodiske løysingar med periode lengde $2^n\,T$, der f^{2n} har denne perioden.



(a) *Plot av bifurkasjonen i den logistiske avbildinga (λ varierer langs den horisontale aksen)*

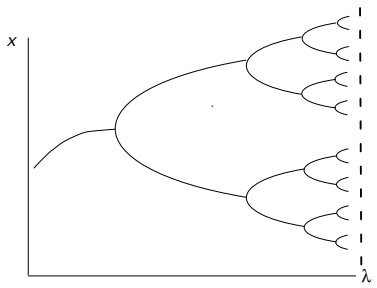


(b) *Plot, av Lyapunov-eksponenten i den logistiske avbildinga (λ variererer langs den horisontale aksen)*

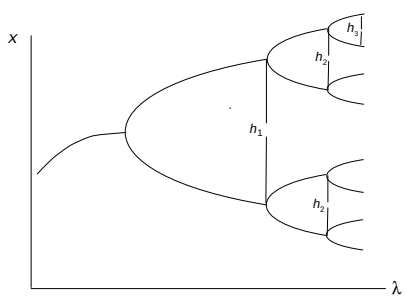
Figur 16: *Plot (a) av bifurkasjonsprosessen og det tilhøyrande plot (b) over Lyapunov-eksponenten*

4.2 Universell grense for høge iterasjonar

I Fig. 15 (c) ser ein, ved å studere det lokale maksimum for f^4, i sentrum av figuren ($x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$), at lokalt sett er ein tilbake til den situasjonen ein starta med. Held ein fram med prosessen vil dette difor få ein tilsvarande oppførsel til det vi alt har sett. Vidare har ein at den skala reduksjonen som f^2 bestemmer for f^4, er heilt ut bestemt av den funksjonelle komposisjonen, slik at lokalt sett, så konvergerer kurvene svarande til f^{2n} og f^{2n+1} slik at skala reduksjonen frå nivå til nivå vil *konvergere mot ein bestemt konstant*. Lat d_n stå for avstanden frå $x = \frac{1}{2}$ til næraste elementet av attraktorsyklus med periode 2^n i 2^n-syklusen for $\lambda = \lambda_n$. Det finst eit positivt tal α_n som skalerer denne avstanden ned til 2^{n+1}-syklusen for $\lambda = \lambda_{n+1}$ gitt ved



(a) *Prinsipp-skisse av periodedobling for den logistiske avbildinga*



(b) *Prinsipp-skisse av periodedobling for den logistiske avbildinga m/avstand i x-verdi for kvart steg.*

Figur 17: *Plot (a) av ein generell periodedoblingsprosess. (b) same prosessen med sprang i x-verdi på dei ulike trinn i utviklinga.*

$$\alpha_n \stackrel{def}{=} -\frac{d_n}{d_{n+1}}\,. \tag{224}$$

Ein kan visa at denne reskaleringa kan også gjerast ved å sjå på forholdet $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ slik det er skissert i Fig. 17 (a) og (b).

Då denne reskaleringa er bestemt berre av ein funksjonell komposisjon, så finst det ein eller annan funksjon som vil reprodusere seg sjølv, skalert med skalafaktoren $-\alpha$. Denne funksjonen, g, har kvadratisk maksimum omkring $x = \frac{1}{2}$, kan skalerast slik at den er 1 for $x = \frac{1}{2}$. Og ved koordinatskifte kan $x = \frac{1}{2} \to x = 0$, slik kan ein visa at g oppfyller funksjonslikninga

$$-\alpha\, g(g(\frac{x}{\alpha})) = g(x)\,. \tag{225}$$

Substituerer ein $g(0) = 1$, finn ein

$$g(1) = -\frac{1}{\alpha}\,. \tag{226}$$

Vi har difor at likn. (225) er ei bestemt likning som for funksjonen $g(x)$ gjennom x^2, har maksimum lik 1 i $x = 0$.

Det finst ei eintydig løysing av likn. (225) som bestemmer den universelle konstanten

$$\alpha = 2,502907875\ldots\,. \tag{227}$$

Når ein kjenner α, så kan ein frå likn. (224) predikere ei bestemt skalering som bind alle iterte av eit vilkårleg system som har innebygd fenomenet *periodedobling*.

I Appendiks C er det presentert eit MAPLE-program som finn ein tilnærma verdi for α.

Den "utleiinga"av likninga for g vi har presentert her, er berre ein skisse. Den kan gjerast stringent, slik det er gjort i t.d. [8], men det fører for langt i vår samanheng.

4.3 Bifurkasjonar

Bifurkasjonsprosessar er eit fenomen som er velkjend frå visse typar ikkje-lineære differensiallikningar som har ein parameter som varierer, bifurkasjonsparameteren. Då kan det skje, at eit likevektspunkt som kan vere stabilt, i eit kritisk punkt blir ustabilt, samstundes som to andre stabile likevekts-punkt veks fram slik som vist på Fig. 18 (b).

4.3.1 Høygaffel-bifurkasjon

Eit enkelt eksempel på ei likning som gir ein "høygaffel bifurkasjoner

$$\dot{x} = y\,, \qquad \dot{y} = \mu\, x - x^3 - y\,. \tag{228}$$

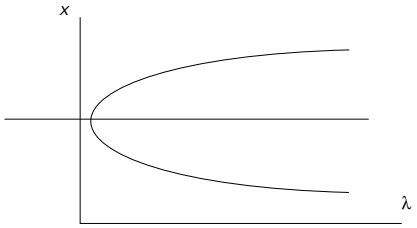
Vi har her at for $\mu < 0$, så er origo eit stabilt likevektspunkt: Eit knutepunkt for $-\frac{1}{4} < \mu < 0$, og ein spiral for $\mu < -\frac{1}{4}$. For $\mu > 0$ er origo eit ustabilt likevektspunkt (sadel-punkt), og dei andre likevekts punkta finn ein for $x = \pm\sqrt{\mu}$, $y = 0$. Desse punkta er stabile knutepunkt for $\mu < \frac{1}{8}$ og stabile spiralar for $\mu > \frac{1}{8}$. Her er μ bifurkasjonsparameteren. Sjå Fig. 18 (b).

4.3.2 Hopf-bifurkasjon

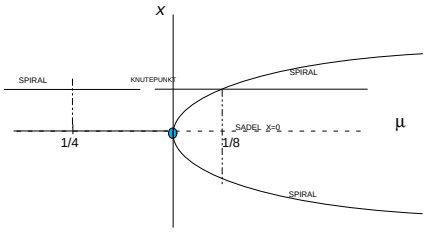
Eit standard eksempel på ein annan type bifurkasjon er det ein kallar Hopf-bifurkasjon. I dette tilfellet har ein eit stabilt likevektspunkt som blir ustabilt og går over til ein stabil grense-syklus. Eit eksempel på dette er systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu\, x + y - x(x^2 + y^2)\,, & (229)\\ \dot{y} &= -x + \mu\, y - y(x^2 + y^2(\,, & (230) \end{aligned}$$

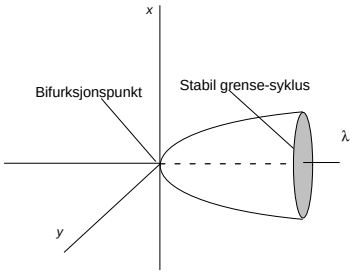
eller i polarkoordinatar



(a) *Plot av bifurkasjonen, skisse for det generelle tilfellet*



(b) *Plot av bifurkasjonen likn. (228), der μ variererer langs den horisontale aksen*



(c) Hopf-bifurkasjon

Figur 18: *Plot (a) av ein generell gaffel-bifurkasjonsprosess. (b) refererer til likn. (228) og (c) er skisse av ein Hopf bifurkasjon.*

$$\dot{r} = r(\mu - rr)\,, \quad \dot{\theta} = -1\,.$$

For $\mu < 0$ er løysinga ein stabiil spiral som går mot $x = y = 0$ eller $r = 0$, med andre ord, det er ein stabil spiral. Når μ aukar og blir større enn null, går den stabile spiralen over til å bli ustabil og nærmar seg ein stabil grense-syklus slik det er illustrert i Fig. 18 (c).

4.4 Verknad av små skilnader i startkrav

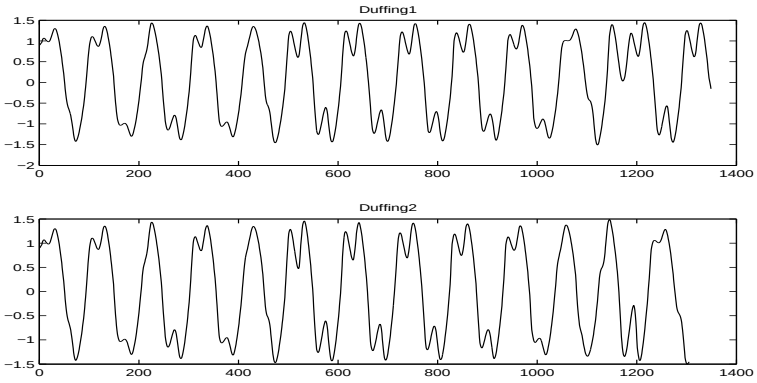
Det er typisk for ikkje-lineære problem, som er nær det kaotiske regimet, at løysingane etter som tida går vert svært avhengige av startkrav. Som eit eksempel på det skal vi sjå på Duffing si likning med eit drivledd, $r\cos(st)$. Vi skriv likninga som system og har [11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k\,x_1 - x_2 - x_2^3 - r\cos(s\,t)\,, \\ \dot{x}_2 &= x_1\,. \end{aligned}$$

Med $k = 0,3$, $r = 0,5$ og $s = 1,2$ finn ein følgjande løysingar numerisk:

Fig. 19 syner at etter ca. 1000 einingar på den horisontale aksen eller 10 til 11 av dei store svingingane, så er det lite samanheng mellom løysingane.

[11] Dette problemet er løyst på Matlab og finst i filene Duffing.m og duff.m som er lagt ut



Figur 19: *Plot av løysing av Duffing si likning med startkrav* $x_1(0) = 0,900000$ *og* $x_2(0) = 0,42$ *i øverste og* $x_1(0) = 0,900001$ *og* $x_2(0) = 0,42$ *i nederste figuren.*

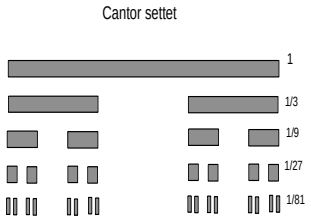
Det har difor ikkje alltid like god meining å løysa startverdi problemet for ikkje-lineære differensiallikningar over ein lang tids-horisont.

4.5 "Underlege"attraktorar og fraktalar

Dei resultata vi har funne som går mot kaotisk oppførsel, fører oss inn i eit anna tema, fraktalar. Vi har møtt eit par tilfelle no av attraktorar i planet som skil seg frå det vi til vanleg forstår med kurver. Ei kurve i to dimensjonar har ikkje noko areal. Når det gjeld dei "underlege"attraktorane som vi har funne i samband med Duffing si likning Fig. 9 og i samband med den logistiske likninga Fig. 16 (a), så er desse strukturane det ein kallar fraktal. Eit enkelt eksempel på ein fraktal struktur er Cantor-mengda som ein konstruerer ved å ta eit interval for eks. $[0, 1]$, dela intervallet i tre like store delar og så fjerna den midterste delen. Den prosessen held ein fram med for dei to intervalla ein har att og fortset slik n gonger. I grensa $n \rightarrow \infty$ får ein definert ei mengde som kallast Cantor-mengda. Etter det n-te steget står det att 2^n linestykke som kvar har lengde $(\frac{1}{3})^n$. Målet eller total lengda av den attverande Cantor mengda er

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}(\frac{1}{3})^k = 0\,. \tag{231}$$

For å få eit mål for slike mengder som dei vi har her, treng ein innføra eit nytt omgrep: Kapasitet-dimensjon.



Figur 20: Grafisk bilete av prosessen for å laga Cantor-mengda

4.6 Dimensjon

Ei kvar mengde i matematikken har ein karakteristisk eigenskap: *Dimensjonen*. Dette gjeld også attraktorar i faserommet eller i eit Poincaré-snitt i faseromet. Naturelege dimensjonstal er: 0 (eit punkt), 1 (eit linestykke), 2 (eit flatestykke), 3 (eit volume) o. s. b. høgare dimensjonar vert gjerne kalla hyperflater eller hypervolum, jamvel om slike mengder ikkje let seg førestilla geometrisk (vi er i førestillingsevne bundne til det tredimensjonale rommet og under-rom av dette, men det set ingen grense for kva som er mogeleg i matematikken).

Det som har blitt eit populært tema å studera i seinare år, er mengder som har dimensjon som ikkje er eit heilt tal. Men då krevst det ein definisjon som er operasjonell d. v. s. som gjer det mogeleg i konkrete tilfelle å avgjera dimensjonen på mengder som fell i mellom dei heiltalige dimensjonane. Ved starten av dette hundreåret var det eit viktig tema å forstå og få klarlagt dette. Etter som tida har gått, har komplikasjonane når det gjeld dette omgrepet berre auka, og det finst no eit ti-tals definisjonar på dimensjon. Med andre ord, ein nokså uryddig og komplisert materie å gå inn i. Sjå t.d. [9] s. 229 og [10]

For å gjere ei vanskeleg sak enkel, skal vi her avgrensa oss til å sjå på ein definisjon av dimensjon som vert kalla *kapasitet-dimensjon*.

4.6.1 Kapasitet-dimensjon

Lat det aktuelle sett av punkt i det n-dimensjonale rommet, som vi vil finna dimensjonen av, vere gitt og avgrensa, altså avstanden mellom to vilkårlege punkt har ein øvre skranke. Lat ϵ vere sidekanten i ein n-dimensjonal kubus. Lat vidare $N(\epsilon)$ vere det minste talet på slike kuber som trengs for å dekka alle punkt i den aktuelle mengda. Vi definer *kapasitet-dimensjone* ved at $N(\epsilon) = k\,\epsilon^{-D}$ slik at $\ln N(\epsilon) = \ln k + D \ln \epsilon^{-1}$ eller $D = \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(\epsilon^{-1})} - \frac{\ln k}{\ln \epsilon^{-1}}$, der k er ein proporsjonalitets-konstant. Dette fører til denne formelle definisjonen:

$$D \stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}}\,. \tag{232}$$

Lat oss sjå kva som skjer om vi brukar denne definisjonen på eit linestykke med lengde a.

Del linestykket opp i n like store bitar (a/n) der n er vilkårleg stor. Set $\epsilon = 1/n$. Vi treng då $n\,a$ av desse linestykka for å dekka linestykket a, slik at $N(\epsilon) = n\,a$, og vi finn

$$\begin{aligned} D &\stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(a\,n)}{\ln n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(a)}{\ln n} + 1 = 1\,. \end{aligned}$$

Vi merkar oss at lengda på linestykket ikkje betyr noko for dimensjonen. Det er lett å sjå ut frå denne definisjonen at dimensjon av eit flatestykke $a \times b$ og eit volum $a \times b \times c$ vert tilsvarane 2 og 3.

Går vi tilbake og ser på Cantor mengda og vel $\epsilon = 3^{-k}$, så finn ein

$$D = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,631\,, \tag{233}$$

altså ein ikkje-heiltals dimensjon. Eit slikt sett seier vi er ein $fraktal$.

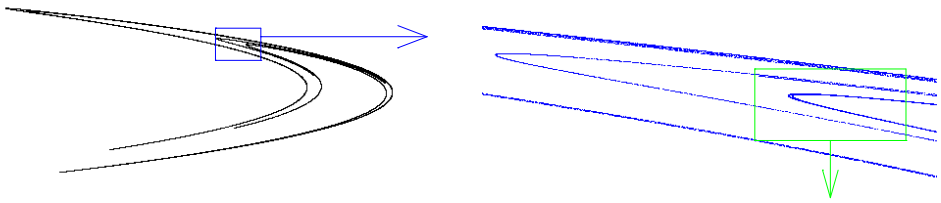
Vi har tidlegare sett eksempel på *fraktalar* i attraktorane vi fann for Duffing si likning og for den logistiske likninga. Sjå Fig. 9 og Fig. 17. På grunn av den kompliserte strukturen av desse mengdene, kallar vi dette for *underlege* (strange) attraktorar.

4.7 Henon attraktoren

Eit svært mykje brukt eksempel på ein "underleg"attraktor er Henon-attraktoren. Den er definert ved avbildinga

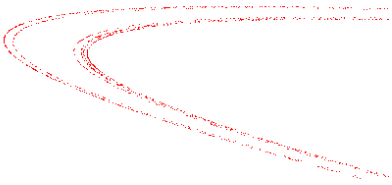
$$x_{n+1} = y_n + 1 - a\,x_n^2 \tag{234}$$
$$y_{n+1} = b\,x_n \tag{235}$$

For $a = 1,4$ og $b = 0,3$ får ein dei numeriske resultata som er vist i Fig. 21 og Fig. 22

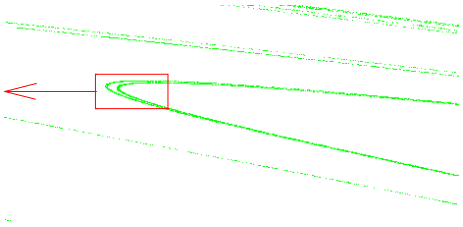


(a) Henon1

(b) Henon2



(c) Henon4

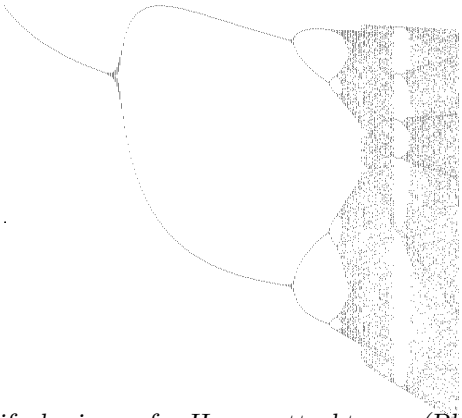


(d) Henon3

Figur 21: *Henon-attraktoren med 3 forstørringar* $1 \to 2 \to 3 \to 4$. *(Plot produsert av Dynamic Solver f32)*

Ein ser ut frå forstørringane at ein kjem tilbake til ein struktur som er svært nær den ein starta med, men speilvend. Om ein hadde gjennomført forstørringa tre trinn til, ville ein venta å finna tilbake til det ein starta ut med. Dette er typisk for fraktale strukturar. Dei er ved forstørring sjølvsimilære.

Vi merkar oss også at i Fig. 22 har ein eit bifurksjons-mønster som minner mykje om det vi fann for den logistiske likninga i fig. 16 (a). I boka [9] er det gitt ein tabell over korleis bifurkasjonsparameteren a varier i høve til periodedoblinga. Dette samsvarar med det vi fann for den logistiske likninga. Feigenbaum sine universelle konstantar er også eit resultat av dette systemet.

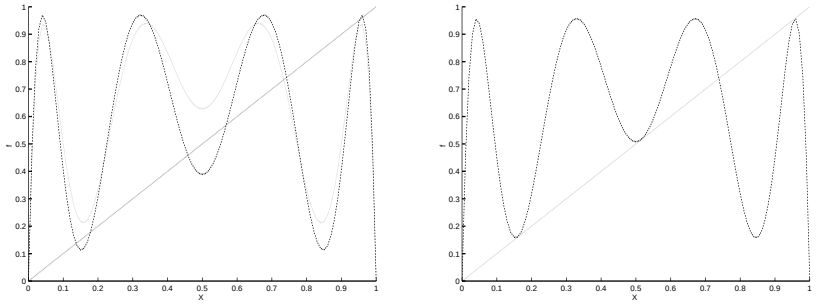


Figur 22: *Plot av bifurkasjonen for Henon-attraktoren. (Plot produsert av Dynamic Solver f32)*

Det som er særleg verd å merka seg er at også i ein kaotisk oppførsel kan det finnast ein viss orden.

4.8 Periode-3 utvikling

Vi har hittil konsentert oss om periode 2 utvikling. Men kan det også tenkjast at fikspunkt for f^3 har ein tilsvarande evolusjon som det ein har for f^2.



(a) periode-3 (b) periode-3

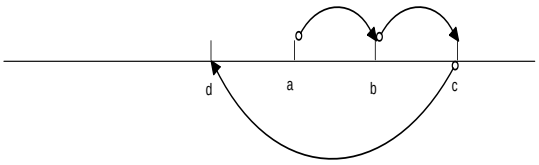
Figur 23: *Evolusjon av periode-3. I Fig. (a) er det to tilfelle: Den prikka kurva har* $\lambda = 0,94$ *og den stipla kurva har* $\lambda = 0,97$. *I fig. (b) er* $\lambda = 0,957$.

I Fig. 23 er diagram av den tredje-itererte, f^3, teikna for ulike verde av bifurkasjonsparameteren λ. Vi merkar oss at når λ aukar, når ein ein kritisk λ-verdi der vi får tre nye fikspunkt for f^3 som så bifurkerer i tre par, altså seks nye fikspunkt (tre stabile og tre ustabile). Dette blir difor analogt til periode-2 utviklinga. Periode-3 uviklar seg på same måte til periode-6, periode-12, periode-24 o.s.b. Og denne periodedobling-kaskaden har same Feigenbaum-konstantane som før. Dette fører ved aukande λ til kaos.

Eit velkjend resultat av Li & Yorke [11] uttrykkjer det slik: Periode tre betyr kaos“. Li & Yorke studerte den generelle avbildinga

$$x_{n+1} = F(x_n)\,, \tag{236}$$

der $F(x)$ er ei kontinuerleg avbilding på eit lukka intervall t. d. $[0,1]$ på seg sjølv. Teoremet til Li & Yorke uttrykkjer at: Dersom vi har at F avbildar eit punkt a i b, d.v.s. $b = F(a)$ og b over i c, d.v.s. $c = F(b)$ og vidare c inn i d d.v.s. $d = F(c)$, slik at: $d \leq a < b < c$, då vil punkta i intervallet $[0,1]$ bli avbilda kaotisk, d.v.s. på vilkårleg måte. Ut få dette ser ein at dersom det eksisterer eit punkt a slik at $d = a$, då har ein eit periode-3 system og kravet ovanfor er alltid oppfylt. Dette impliserer kaos. Sjå Fig. 24



Figur 24: *Periode - 3 senariet.*

Ein eigenskap ved eit slikt system er at at det finst punkt som har ein vilkårleg periode. Dette følgjer av eit teorem av Sharkovsky [12]:

Teorem 4.1 (Sharkovsky) *Lat T vere eit ordna set $\{3 < 5 < 7 < \cdots < 2\times 3 < 2\times 5 < 2\times 7 \cdots < 2^2\times 3 < 2^2\times 5 < 2^2\times 7 \cdots < 8 < 4 < 2 < 1\}$. Lat $f : I \to I = [0,1]$, vere ei glatt avbilding slik at $f(0) = f(1) = 0$ som har eit enkelt kritisk punkt. Dersom $m < n$ relativt til ordninga i settet T, og f har eit periodisk punkt med merke (d.vs. kortaste) periode m, då har f eit priodisk punkt med periode n.*

4.9 Deterministisk kaos

Eit av dei problemområde som har fått stor merksemd dei siste tiåra er kaotisk oppførsel i deterministiske system. Det at ein ikkje treng ty til vilikårlege inngrep i eit system for å produsere kaotisk oppførsel har store implikasjonar også reint filosofisk. Årsakslova som ein gjerne forfektar i deterministisk samanheng kjem i eit nytt lys når ein finn at fullt ut deterministiske system kan vise kaotisk oppførsel. Men det er ikkje så heilt enkelt å gje ein presis definisjon på kva ein meiner med *deterministisk kaos*.

Dersom vi ser på ein velkjend prosess, det å kaste mynt og krone, så er vi inne på noko som fortel oss om tilfeldig oppførsel. Dersom vi gennomfører ein test med å kaste mynt og krone og får utfallet

$$M,\, K,\, M,\, M,\, K,\, K,\, M,\, \ldots\,.$$

så har vi ein sekvens av hendingar. Ein slik sekvens kallar ein for ein *Bernoulli*-sekvens. I vårt system er det ikkje nokon tilfeldige prosessar, som det er når vi kastar mynt og krone. Likevel kan ein formulere problemet slik at det er tale om å samanlikna visse sekvensar.

Definisjon 4.1 (Deterministisk kaos) *Eit deterministisk system er* **kaotisk** *dersom ein kan finne, for ein vilkårleg føreskreven Bernulli-sekvens, eit startpunkt som dynamisk vil reprodusere den same sekvensen av symbol, når ein rører seg gjennom ein utvald del av faserommet. I såfall vil vi seie at start tilstanden svarar til den føreskrevene Bernulli-sekvensen.*

Korleis kan dette realiserast i praksis? La oss sjå på periode-3 senariet. Vi delar intervallet for x, $[0,1]$, opp i bitar som vi gir namn ved å bruke eit eller anna symbol. Dersom ein bane er innom ein av bitane, så er denne realisert med tilhøyrande symbol. Påstanden er då at det finst startverde som er slik at ein bane er innom alle dei føreskrivne bitane. I den meining er systemet *kaotisk*.

Li & Yorke har også ein alternativ formulering. Ein konsekvens av Sharkovsky sitt teorem, 4.1, er at det finst startpunkt som gir ein vilkårleg vald periode. Dette settet av startpunkt er ikkje eingong teljande. Vidare er der eit uteljande sett startpunkt som ikkje eingong er asymptotisk periodiske. Dette settet av startunkt vil vi kalla S.

Definisjon 4.2 (Asymptotisk periodisk) *Lat q vere eit periodisk punkt, då kallar vi p asymptotisk peroiodisk dersom*

$$\lim_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| \to 0\,. \tag{237}$$

Dette resultatet fortel oss at det finst ei uteljande mengde, S, som ikkje eingong nærmar seg ei periodisk løysing (og heller ingen punkt i S er periodisk). Ut frå dette har Li & Yorke [11] ein alternativ definisjon på kaos.

Definisjon 4.3 (Kaos, Li & Yorke) *For einkvar p, $q \in S$ $(p \neq q)$, har vi:*

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0\,, \tag{238}$$

og

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0\,. \tag{239}$$

Interpretasjon av dette er noko komplisert og byggjer på at ein kvar uendeleg sekvens av punkt $\{x_n\}$ i ei lukka mengde (kompakt) har minst ein subsekvens $\{x_{n_j}\} \in \{x_n\}$ som har eit grense punkt (Bolzano-Weierstrass teoremet): Altså det finst ein $l_{\{n_j\}}$, slik at $\lim_{n_j\to\infty} x_{n_j} \stackrel{def}{=} l_{\{n_j\}}$, og dette er avhengig av val av subsekvens. Frå definisjonen på lim sup i likn. (238), har ein

$$\limsup_{n\to\infty} = \max_{\{n_j\}} l_{\{n_j\}} = l_{max}\,. \tag{240}$$

Tilsvarande frå likn. (239), har ein

$$\liminf_{n\to\infty} = \min_{\{n_j\}} l_{\{n_j\}} = l_{min}\,, \tag{241}$$

altså minimumsverdet ein får frå å sjå på alle mogelege subsekvensar. Når vi brukar dette i høve til likn. (239), så får ein at sekvensen av verdiar, $|F^n(p) - F^n(q)|$, som ein får ved vilkårleg val av startpunkt, $(p, q) \in S$, har ein subsekvens av avbildingar slik at

$$\lim_{n_j\to\infty} |F^{n_j}(p) - |F^{n_j}(q)| = 0\,. \tag{242}$$

Med andre ord, ein kan finna avbildingar som ligg vilkårleg nær kvarandre når $n_j \to \infty$, og på den andre sida kan ein finna sekvensar av avbildingar slik at

$$\lim_{n_j\to\infty} F^{n_j}(p) = p_0\,, \qquad \lim_{n_j\to\infty} F^{n_j}(q) = q_0\,, \quad \text{og} \quad |p_0 - q_0| = l_{max} > 0, \tag{243}$$

slik at det likn. (238) og (239) uttrykkjer er at avbildingane, F^n oppfører seg vilkårleg, (tilfeldig) i grensa $n \to \infty$, i den meining at dei vert verande vilkårleg nær for visse steg n_j samstundes som dei har ein endeleg avstand (l_{max}) for andre subset av ei slik avbilding.

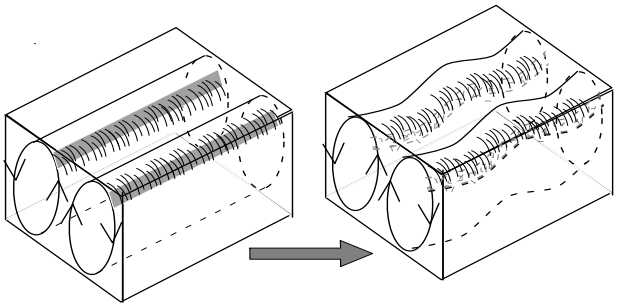
Dette er ein interessant måte å karakterisere ei *kaotisk* avbilding på. Men den gir ikkje noko kvantitativt mål på *kaotisk* oppførsel. Det fell utanfor ramma av dette kurset.

Lat oss ta eit steg tilbake og sjå på den logistiske avbildinga. Vi minnast at det fanst ein kritisk verdi λ_∞ slik at denne verdien av λ sette eit skilje mellom periodiske og aperidiske banar. For $\lambda > \lambda_\infty$ er banane karakterisert ved at dei er aperiodiske og nærmar seg heller ikkje periodiske banar, dessutan er banane sterkt avhengige av start punkt. Med andre ord, ein er for $\lambda > \lambda_\infty$ i eit kaotisk regime.

4.10 Praktisk nytte

Det kan no vere rett å stilla seg spørsmålet om det vi no har sett på berre er ein leik for matematikarar og spesielt interesserte, eller om det også har praktisk nytte. Med praktisk nytte meiner vi i denne samanhengen at dette kan brukast til å modellera fenomen som er observerte utanfor matematikken. Då er det slik at det finst ei rekkje fenomen, som har tydelege teikn på at det som skjer, er eit periodedoblings fenomen. Kanskje det mest kjende fenomenet er det som vert kalla Rayleigh-Bénard ustabilitetar.

I ei væske som vert oppvarma nedanfrå, vil ein få ein ustabil situasjon med ei lettare væske under ei tyngre, fordi eit væskevolum utvidar seg med aukande temperatur. Slik at eit volum med ein gitt masse får eit auka volum og difor mindre tettleik. Bifurkasjonsparameteren i dette tilfellet vert temperaturgradienten. Når den aukar, vert systemet ustabilt, og det fører til ei ikkjelineær ordna rørsle i form av rullar". Vidare oppvarming fører systemet over i ein ny fase med ustabile (buktande) rullar. Nøyaktige observasjonar viser at dette skjer i samsvar med det periodedoblings mønsteret vi har studert. Det som kanskje er mest oppsiktsvekkjande med dette eksperimentet, er at eit fleirdimensjonalt system viser eindimensjonal universalitet. Sjå elles Fig. 25.



Figur 25: *Skisse av eit eksperimentelt oppsett med Rayleigh- Bénard ustabilitet, ikkjelineær fase*

Referansar

[1] Krylov, N. og Bogoliubove, N. N., *Introduction to Nonlinear Mechanics* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1947.

[2] D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (Reprinted with corrections 1983) Oxford Applied Mathematics and computing series. Clerendon press · Oxford.

[3] Kristian B. Dysthe, Notat om dynamiske system, Matematisk institutt UiB.

[4] Lamberto Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations* Third edition. Springer - Verlag 1971.

[5] Maurice Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer Verlag 1966.

[6] Raimond A. Struble, *Nonlinear Differential Equations* Robert E. Krieger Pulishing Company, Malabar, Florida 1983.

[7] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems* John Wiley & Sons (Fourth edition 1986) (Pensumbok i M 117).

[8] *Universal Behavior in Nonlinear Systems* Los Alamos Science/Summer 1980 by Mitchell J. Feigenbaum.

[9] Heinz-Otto Peitegen, Hartman Jürgens og Dietmar Saupe, *Fractals for the Classroom. Part One* Springer-Verlag 1991.

[10] Hemmer, P. C. *Ikke-lineær dynamikk - en innføring* Forelesningskompendium utgitt ved NTNU.

[11] Li, T.Y. & Yorke, J.A. Period three implies chaos *Amer. Math. Monthly* **82**, 983-92(1975).

[12] Sharkovsky, A.N., Ukrainian Math. J., **16**(1), 61 (1964).

[13] Frøyland, J. Chaos and Coherence Inst. of Physics UiO (UBBRB 514.7 Frø)

Appendiks

A Eksistens og eintyde for først ordens ODE

Gitt differensiallikninga med startkrav

$$y'(x) = F(x, y(x)) \,, \quad y(x_0) = y_0 \,, \tag{244}$$

der a og y_0 er gitte verdiar. Vi skal formulera eit teorem for eksistens og eintyde for ei slik differensiallikning. Men først skal vi sjå på ein metode som vert kalla

A.1 Suksessive tilnærmingar eller Picard itereasjonar

for å løysa denne typen differensiallikningar. Metoden går slik: Vi skriv om likn. (244) til ei integrallikning

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t)dt \,. \tag{245}$$

Merk at denne formuleringa er ekvivalent med startverdeproblemet (244). Vis det!

Vi definerarer dei tilnærma løysingane y_0, y_1, ... y_n:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_0(t))dt \,, && (246)\\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_1(t))dt \,, && (247)\\ &\vdots && (248)\\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_{n-1}(t))dt \,. && (249) \end{aligned}$$

og vi finn "løysingasom

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \,. \tag{250}$$

For å illustrera metoden skal vi sjå på eit enkelt døme:

$$y'(x) = k\, y(x) \,, \quad x_0 = 0, \; y(0) = 1 \,. \tag{251}$$

Vi finn

$$y_1(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} k dt = 1 + kx\,, \tag{252}$$

$$y_2(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} k(1+kt) dt = 1 + kx + \frac{1}{2}(kx)^2\,, \tag{253}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} k(1+kt+\frac{1}{2}(kt)^2) dt = 1 + kx + \frac{1}{2}(kx)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(kx)^3 \tag{254}$$

$$\vdots \tag{255}$$

$$y_n(x) = 1 + kx + \frac{1}{2}(kx)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(kx)^3 + \cdots \frac{1}{n!}(kx)^n\,. \tag{256}$$

og vi finn lett

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^{kx}\,, \tag{257}$$

som vi kjenner att som den eksakte løysinga av startverdeproblemet (251). Ved hjelp av metoden med suksessive tilnærmingar, kunne vi i dette høvet finna den eksakte løysinga uttrykt ved ein elementær funksjon. Men det er i dei færraste tilfelle at det går så lett. Til vanleg endar ein opp med løysinga som ei rekkje, og er ein heldig, kan ein finna det ålmenne leddet. Men å summera rekkja er ikkje alltid like enkelt. Her bør ein tenkja på at den enkledifferensiallikninga til Airy, $y'' = xy$, ikkje kan løysast v.h.a. elementære funksjonar

Det viktigaste med denne metoden er at han kan brukast til å finna tilnærma løysingar på problem som ein ikkje utan vidare kan løysa på annan måte. Men vi sit att med nokre sørsmål:

1. Når konvergerer prosessen?
2. Når konvergerer prosessen mot ei løysing av problemet?
3. Finst det fleire løysingar?

Stort sett får ein svar på desse spørsmåla i teoremet for eksistens og eintyde av løysing av startverdeproblemet for første ordens ODL. Men før vi formulerer dette teoremet, skal vi sjå på eit krav som vi kallar Lipschitz-kravet.

A.2 Lipschitz-kravet

Lipschitz-kravet for ein funksjon $\phi(y)$, $y \in D$ er definert slik:

$$|\phi(y_1) - \phi(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{for} \quad (y_1,\, y_2) \in D\,. \tag{258}$$

der L er ein konstant.

Det er lett å sjå at dersom ϕ har ein derivert, som er avgrensa i det aktuelle området, så oppfyller ϕ Lipschitz-kravet.

PROV:

Det ser ein slik:

$$|\phi'(y)| \leq A \qquad y \in D\,, \tag{259}$$

der A er ein konstant.

$$\int_{y_1}^{y_2} \phi'(y)\,dy = \phi(y_2) - \phi(y_1)\,, \tag{260}$$

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \phi'(y)\,dy\right| \leq \left|\int_{y_1}^{y_2} |\phi'(y)|\,dy\right| \leq \left|\int_{y_1}^{y_2} A\,dy\right| = A|y_2 - y_1|\,. \tag{261}$$

Av dette ser ein lett at

$$|\phi(y_2) - \phi(y_1)| \leq A|y_2 - y_1|\,, \tag{262}$$

og påstanden er dermed vist. Det vi skal merka oss her, er at Lipschitz kravet stiller ikkje krav om at den deriverte av ϕ skal eksistera.

A.3 Eksistens og eintyde teorem

TEOREM 1

Gitt startverde problemet

$$y'(x) = f(x, y(x))\,, \quad y(a) = b\,, \tag{263}$$

der a og b har gitte verdiar og funksjonen $f(x, y)$ er kontinuerleg på eit område D i (x, y) planet. Lat M vera ein konstant slik at

$$|f(x, y)| < M \quad \text{for} \quad (x, y) \in D\,, \tag{264}$$

Lat vidare $f(x, y)$ stetta Lipschitz kravet i y, altså:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|\,, \tag{265}$$

der A er ein konstant uavhengig av x, y_1 og y_2. Lat rektangelet R vera definert som

$$|x - a| \leq h\,, \quad |y - b| \leq k \quad \text{der} \quad R \subset D \tag{266}$$

og der $Mh < k$. Då har startverde-problemet, (244), ei eintydig løysing i R som inneheld punktet (a, b).

PROV:

a) **Eksistens av løysing**

Vi skal først visa at løysinga finst under dei gitte vilkåra. Suksessive tilnærmingar gir:

$$y_1(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t,b)dt\,, \tag{267}$$

$$y_2(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))dt\,, \tag{268}$$

$$\vdots \tag{269}$$

$$y_n(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt\,. \tag{270}$$

Vi skal visa at $\lim_{n\to\infty}$ gir løysinga vi søkjer. Vi skal ta dette provet i fleire steg.

1. *Først skal vi visa at for $a-h \le x \le a+h$, så ligg $y = y_n(x)$ i rektangelet R, eller $b-k < y < b+k$.*

   Vi brukar induksjon til å visa dette. Dersom $y = y_{n-1}(x)$ ligg i R, så følgjer det at

   $$|y_n(x) - b| = \left| \int_a^x f(t,y_{n-1}(t))dt \right| \le M|x-a| \le Mh < k\,, \tag{271}$$

   sidan ein lett ser at påstanden gjeld for $n = 1$, så gjeld påstanden for alle n.

2. *Pånyskal vi bruka induksjon til å visa at*

   $$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{MA^{n-1}}{n!}|x-a|^n. \tag{272}$$

   Gå ut frå at denne ulikskapen gjeld for $n-1$ i staden for n. Vi har

   $$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_a^x \{f(t,y_{n-1}(t)) - f(t,y_{n-2}(t))\}dt\,, \tag{273}$$

   og ved å bruka Lipschitz-kravet finn ein

   $$|f(t,y_{n-1}(t)) - f(t,y_{n-2}(t))| \le A|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \tag{274}$$

   slik at ut frå induksjonshypotesen har vi

   $$A|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \le \frac{MA^{n-2}}{(n-1)!}|x-a|^{n-1}\,. \tag{275}$$

   Det følgjer då at

   $$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{MA^{n-1}}{(n-1)!}\left| \int_a^x |t-a|^{n-1}dt \right| = \frac{MA^{n-1}}{n!}|x-a|^n. \tag{276}$$

   For $n = 1$ finn ein lett

   $$|y_1(x) - b| \le \left| \int_a^x f(t,b)dt \right| \le M|x-a| \tag{277}$$

   som er i samsvar med (272), og påstanden er dermed vist.

3. *Følgja $y_n(x)$ konvergerer uniformt mot ei grense for $a-h \le x \le a+h$.*

Vi ser no på rekkja

$$y_n(x) = b + \sum_{k=1}^{k=n} [y_k(x) - y_{k-1}(x)]\,, \tag{278}$$

som er ein identitet for endeleg n. Resultatet i likn. (276) syner at kvart ledd i rekkja ovanfor er mindre eller lik ledda i den konvergente rekkja

$$b + Mh + \frac{MA}{2!}h^2 + \cdots + \frac{MA^{n-1}}{n!}h^n + \cdots \tag{279}$$

Weierstrass M-test[12] syner dermed at denne rekkja (278) konverger absolutt og uniformt for $|x - a| \leq h$ og $y(x) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eksisterer.

4. *Vi har at* $y(x) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ *stettar differensallikninga (244) med startkrav.*

   Vi merkar oss at rekkja for $y(x)$ er sett saman av uniformt kontinuerlege funksjonar. slik at $\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$ Dette følgjer frå Lipschitz-kravet. Vi har nemleg

$$|\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq A|\lim_{n\to\infty} y_n(x) - y(x)| = 0 \tag{280}$$

   vidare har vi

$$y_n(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \tag{281}$$

   som i grensa $n \to \infty$ gir

$$y(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\,. \tag{282}$$

   Integranden i denne likninga er kontinuerleg og det medfører at vi kan derivera denne likninga. Det gir likn. (244) og dessutan ser ein at $y(a) = b$, altså er $y(x)$ ei løysing av startverdeproblemet (244). Det er verd å merka seg at dette provet er konstruktivt, d. v. s. Provet gir også ein metode, suksessive tilnærmingar eller Picard iterasjon, til å finna løysinga med.

b) **Løysinga er eintydig**

At løysinga må vera eintydig kan ein sjå slik:

Lat $y = y_1(x)$ og $y_2 = y_2(x)$ vera to løysingar av startverdeproblemet (244), då har vi

[12] Denne testen er eigentleg eit samanliknings-kriterie.

$$y_1(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \tag{283}$$

og

$$y_2(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \tag{284}$$

eller

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|dt \right| && (285) \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} A|y_1(t) - y_2(t)|dt \right| && (286) \\ &\leq AB|x - a|\,, && (287) \end{aligned}$$

der konstanten B kan veljast t.d. som $2k$. Vi kan no gjenta prosedyren og finn steg for steg øvre skrankar for

$$|y_1(x) - y_2(x)| \qquad x \in (a - h, a + h) \tag{288}$$

gitt som

$$\frac{A^2B}{2!}|x - a|^2, \cdots, \frac{A^nB}{n!}|x - a|^n, \cdots . \tag{289}$$

Denne følgja har tydelegvis 0 som grense.[13]

Q. E. D.

Dette provet kan lett utvidast til system av diffensiallikningar. Det sentrale nye elementet er det ein kallar metrikk, som er eit mål for avstand i generalsert meining. De vert ikkje høve til å koma inn dette her.

B Superstabile banar

Her følgjer eit MAPLE-program for å finna dei første superstabile banane:

```
> F1:=proc(x,lambda) 4*lambda*x*(1-x) end;
```

$$F1 := \mathbf{proc}(x,\ \lambda)\, 4 \times \lambda \times x \times (1 - x)\, \mathbf{end}$$

```
> DF1:=proc(x,lambda) diff(F1(x,lambda),x)
> end;
```

$$DF1 := \mathbf{proc}(x,\ \lambda)\, \mathrm{diff}(\mathrm{F1}(x,\ \lambda),\ x)\, \mathbf{end}$$

```
> eqa1:=F1(x,lambda)-x=0;
```

$$eqa1 := 4\,\lambda\,x\,(1 - x) - x = 0$$

[13] Framstillinga vi har brukt her følgjer stort sett den som ein finn i boka: The theory of ordinary differential equations. by J. C. Burkill (Longman) Denne boka er utseld frå forlaget. Men kjem du over eit brukt eksemplar så kjøp boka.

```
> eqb1:=DF1(x,lambda)=0;
```

$$eqb1 := 4\,\lambda\,(1-x) - 4\,\lambda\,x = 0$$

```
> fsolve({eqa1,eqb1},{x,lambda},{x=.1..1,
> lambda=.1 ..1});
```

$$\{\lambda = .5000000000,\, x = .5000000000\}$$

```
> F2:=proc(x,lambda) F1(F1(x,lambda),lambda)
> end;
```

$$F2 := \mathbf{proc}(x,\,\lambda)\,\mathrm{F1}(\mathrm{F1}(x,\,\lambda),\,\lambda)\,\mathbf{end}$$

```
> eqa2:=F2(x,lambda)-x=0;
```

$$eqa2 := 16\,\lambda^2\,x\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x)) - x = 0$$

```
> eqb2:=diff(F2(x,lambda),x)=0;
```

$$\begin{aligned} eqb2 :=\ & 16\,\lambda^2\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x)) - 16\,\lambda^2\,x\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x)) \\ & + 16\,\lambda^2\,x\,(1-x)\,(-4\,\lambda\,(1-x) + 4\,\lambda\,x) = 0 \end{aligned}$$

```
> eqb2(x,lambda);
```

$$\begin{aligned} & 16\,\lambda(x,\,\lambda)^2\,(1-\mathrm{x}(x,\,\lambda))\,(1-4\,\lambda(x,\,\lambda)\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)\,(1-\mathrm{x}(x,\,\lambda))) \\ & \quad - 16\,\lambda(x,\,\lambda)^2\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)\,(1-4\,\lambda(x,\,\lambda)\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)\,(1-\mathrm{x}(x,\,\lambda))) \\ & \quad + 16\,\lambda(x,\,\lambda)^2\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)\,(1-\mathrm{x}(x,\,\lambda))\,(-4\,\lambda(x,\,\lambda)\,(1-\mathrm{x}(x,\,\lambda)) + 4\,\lambda(x,\,\lambda)\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)) = 0 \end{aligned}$$

```
> simplify(");
```

$$\begin{aligned} & 16\,\lambda(x,\,\lambda)^2 - 128\,\lambda(x,\,\lambda)^3\,\mathrm{x}(x,\,\lambda) + 384\,\lambda(x,\,\lambda)^3\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)^2 - 32\,\lambda(x,\,\lambda)^2\,\mathrm{x}(x,\,\lambda) \\ & \quad - 256\,\lambda(x,\,\lambda)^3\,\mathrm{x}(x,\,\lambda)^3 = 0 \end{aligned}$$

```
> subs(x=.500000, eqb2(x,lambda));
```

$$\begin{aligned} & 16\,\%2^2\,(1-\%1)\,(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1)) - 16\,\%2^2\,\%1\,(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1)) \\ & \quad + 16\,\%2^2\,\%1\,(1-\%1)\,(-4\,\%2\,(1-\%1) + 4\,\%2\,\%1) = 0 \\ & \%1 := .500000(.500000,\,\lambda) \\ & \%2 := \lambda(.500000,\,\lambda) \end{aligned}$$

```
> simplify(");
```

$$0 = 0$$

```
> subs(x=.500000, eqa2(x,lambda));
```

$$16\,\lambda(.500000,\,\lambda)^2\,\%1\,(1-\%1)\,(1-4\,\lambda(.500000,\,\lambda)\,\%1\,(1-\%1))-\%1=0$$
$$\%1 := .500000(.500000,\,\lambda)$$

```
> simplify(");
```

$$4.\,\lambda(\frac{1}{2},\,\lambda)^2-4.\,\lambda(\frac{1}{2},\,\lambda)^3-.5000000000=0$$

```
> fsolve({"},{lambda},{lambda=0.6..
> 0.9});
```

$$\{\lambda = .8090169944\}$$

```
> F4:=proc(x) F2(F2(x,lambda),lambda) end;
```

$$F4 := \mathbf{proc}(x)\,\mathrm{F2}(\mathrm{F2}(x,\,\lambda),\,\lambda)\,\mathbf{end}$$

```
> eqa4:=F4(x,lambda)-x=0;
```

$$eqa4 := 256\lambda^4\,x\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x))\,(1-16\,\lambda^2\,x\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x)))$$
$$(1-64\,\lambda^3\,x\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x))\,(1-16\,\lambda^2\,x\,(1-x)\,(1-4\,\lambda\,x\,(1-x))))-x=0$$

```
> subs(x=.500000, eqa4(x,lambda));
```

$$256\%2^4\,\%1\,(1-\%1)\,(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1))$$
$$(1-16\,\%2^2\,\%1\,(1-\%1)\,(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1)))(1-64\%2^3\,\%1\,(1-\%1)$$
$$(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1))\,(1-16\,\%2^2\,\%1\,(1-\%1)\,(1-4\,\%2\,\%1\,(1-\%1))))-\%1=0$$
$$\%1 := .500000(.500000,\,\lambda)$$
$$\%2 := \lambda(.500000,\,\lambda)$$

```
> simplify(");
```

$$64.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^4+57344.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{12}-98304.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{13}+8192.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{11}+7168.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^9$$
$$-24576.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{10}-512.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^7-256.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^6+1792.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^8-16384.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{15}$$
$$+65536.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^{14}-64.\lambda(\frac{1}{2},\lambda)^5-.5000000000=0$$

```
> fsolve({"},{lambda},{lambda=0.8..
> 0.9});
```

$$\{\lambda = .8746404248\}$$

C Den universelle konstanten α

Her er eit MAPLE-program for å finna ein tilnærma verdi av den universelle konstanten α

```
> g:= proc(y) 1 -a*y^2+b*y^4  end;
```

$$g := \mathbf{proc}(y)\, 1 - a \times y^2 + b \times y^4\, \mathbf{end}$$

```
> eq:= proc(y) -alpha*g(g(y/alpha)) - g(-y)
> end;
```

$$eq := \mathbf{proc}(y)\ -\alpha \times \mathrm{g}(\mathrm{g}(y/\alpha)) - \mathrm{g}(-y)\, \mathbf{end}$$

```
> asume(alpha>0);
```

$$\mathrm{asume}(0 < \alpha)$$

```
> taylor(eq(y),y=0,5);
```

$$(-\alpha\,(1-a+b)-1)+(-\alpha\,(2\,\frac{a^2}{\alpha^2}-4\,\frac{b\,a}{\alpha^2})+a)\,y^2+$$
$$(-\alpha\,(-a\,(2\,\frac{b}{\alpha^4}+\frac{a^2}{\alpha^4})+b\,(4\,\frac{b}{\alpha^4}+6\,\frac{a^2}{\alpha^4}))-b)\,y^4+\mathrm{O}(y^6)$$

```
> eq1:=-alpha*(1-a+b)-1=0;
```

$$eq1 := -\alpha\,(1-a+b)-1=0$$

```
> eq2:=-alpha*(2*a^2/alpha^2-4*b*a/alpha^2)+a=0
> ;
```

$$eq2 := -\alpha\,(2\,\frac{a^2}{\alpha^2} - 4\,\frac{b\,a}{\alpha^2}) + a = 0$$

```
> eq3:=-alpha*(-a*(2*b/alpha^4+a^2/alpha^4)+b*(
> 4*b/alpha^4+6*a^2/alpha^4))-b=0;
```

$$eq3 := -\alpha\,(-a\,(2\,\frac{b}{\alpha^4} + \frac{a^2}{\alpha^4}) + b\,(4\,\frac{b}{\alpha^4} + 6\,\frac{a^2}{\alpha^4})) - b = 0$$

```
> fsolve({eq1,eq2,eq3},{a,b,alpha},{a=0.1.
> .2.1,b=-200..200, alpha=2. .. 3.});
```

$$\{\alpha = 2.534030095,\, b = .1276132572,\, a = 1.522241562\}$$

```
> d:=2.534030095 - 2.502907875;
```

$$d := .031122220$$

```
> pst:=(d/2.502907875)*100;
```

$$pst := 1.243442490$$