

VEKTOR OG TENSORANALYSE

ved

Gerhard Berge

Matematisk institutt
UNIVERSITETET I BERGEN
September 2004

Føreord

Dette heftet utgjør pensum i emnet M 216 ved Universitetet i Bergen, slike det vart førelese hausten 1988.

Under arbeidet med desse førelesingane er det fleire bøker som har vore til stor nytte nytte. Serleg vil eg nemna:

- Vector and Tensor Analysis by Louis Brand, John Wiley & sons, Inc. New York. 1947 (utselt frå forlaget).
- Tensor Calculus by Barry Spain, Oliver and Boyd, Interscience Publishers, Inc. 1960.
- Vector and Tensor Analysis by Harry Lass, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1950.
- Tensor analysis Teory and Applications by I. S. Sokolnikoff, John Wiley & sons, Inc. 1951.
- Tensor Analysis for Physicists by J. A. Schouten, The Clarendon Press Oxford 1951.
- Notat om 2.grads flater av K. J. Overholt i samarbeid med K. B. Dysthe. Matematisk Institutt, Universitetet i Bergen. (Det gjeld appendiks i dette heftet).

Eg vil takka Reidun Winter som har hatt storparten av arbeidet med å typesetja manuset i $\text{\TeX}$. Ho har gjort eit framifrå arbeid, serleg når ein tek omsyn til at dette var bortimot hennar første møte med $\text{\TeX}$.

Elles vil eg takka Dr. scient student Helge K. Dahle for gjennomlesing av manuset og konstruktiv kritikk.

Bergen den 29. september 1988// Gerhard Berge

Frå hausten 2003 har dette kurset fått emnekoden MAT235. Ein del feil er retta og litt nytt tilfang har kome med. Det gjeld eit avsnitt om geodesiske kurver på kuleflata og Tillegg B.

Bergen september 2004.

Gerhard Berge

Innhold

1	ROMKURVER	1
1.1	INNFØRING	1
1.2	BOGELENGDA	3
1.3	TANGENTVEKTOREN	4
1.4	KRUMMING	6
1.4.1	Binormal og torsjon	7
1.5	FRENETS FORMLAR	9
2	Dyadar	13
2.1	RESIPROKE VEKTORSETT	13
2.2	LINEÆRE VEKTORFUNKSJONAR	14
2.3	ALGEBRA FOR DYADAR	16
2.3.1	Reknereglar	16
2.3.2	Komplette dyadar	19
2.3.3	Den konjugerte dyaden	21
2.3.4	Produkt av dyadar	21
2.3.5	Einingsdyaden	23
2.3.6	Den inverse dyaden	25
2.3.7	Ymse relasjonar med skalar og vektor produkt	25
2.3.8	Invariantar	27
2.3.9	Den adjungerte dyaden	30
2.3.10	Eigenvektorar	31
2.3.11	Symmetriske dyadar	35
2.4	Hamilton-Cayley likninga	37
2.5	DERIVASJON	39
2.6	Sluttmerknad	40
3	UTVALDE EMNE FRÅ VEKTORANALYSEN	41
3.1	GRUNNLEGGJANDE OMGREP	41

3.1.1	Definisjonar	41
3.1.2	Gradient	42
3.1.3	Divergens	42
3.1.4	Kvervling (curl)	43
3.2	VEKTOR IDENTITETAR	44
3.2.1	Enkelt og dobbelt samanhengande område	45
3.3	FUNKSJONELL SAMANHENG	46
3.4	KRUMLINE KOORDINATAR	50
3.5	DIFFERENSIERING	51
3.5.1	Rettvinkla koordinatar	53
3.5.2	Flateskarar og kurveskarar	55
3.6	DIFFERENSIERING PÅ FLATER	55
3.6.1	Flaterepresentasjonar	55
3.6.2	Ny parameter-representasjon	56
3.6.3	Den første fundamentalforma	57
3.6.4	Flate-elementet	58
3.6.5	Differensialoperasjonar på ei flate	59
3.6.6	Oppsummering	61
3.7	Vektorfelt og feltliner	62
3.7.1	Definisjon og innleiing	62
3.7.2	Løysings metodar	64
4	KVASILINEÆRE P.D.L.	75
4.1	KARAKTERISTIKK METODEN	75
4.2	CAUCHY PROBLEMET	77
4.3	SINGULÆRE INTEGRAL	81
4.4	FLEIRE UAVHENGIGE VARIABLE	81
5	ANDRE ORDENS P.D.L.	85
5.1	HYPERBOLSKE P.D.L.	85
5.2	PARABOLSKE P.D.L.	87
5.3	LAPLACE OG POISSON LIKNINGANE	88
5.3.1	Greens identitetar	88
5.3.2	Poisson likning	92
5.3.3	Helmholtz' satsar	93
6	TENSORANALYSE	97
6.1	INNLEIING	97
6.2	DEFINISJONAR OG OMGREP	99
6.2.1	Tensorar av første orden	100

INNHALD

6.2.2	Tensorar av 2.orden	101
6.2.3	Tensorar av vilkårlig orden	102
6.2.4	Utvida basis R^N	103
6.3	Algebra for tensorar	103
6.3.1	Addisjon	103
6.3.2	Multiplikasjon	104
6.3.3	Kontraksjon	105
6.3.4	Skalarproduktet av to vektorar	106
6.3.5	Assosierte tensorar	107
6.3.6	Kvotsient lova	108
6.3.7	Line-elementet	110
6.3.8	Absolutte og relative tensorar	111
6.3.9	Oppsummering tensoromgrepet	112
6.4	DERIVASJON	112
6.4.1	Kovariant derivasjon	112
6.4.2	Gradienten	115
6.4.3	Komma notasjonen	117
6.4.4	Fundamentaltensoren	118
6.4.5	Divergens	120
6.4.6	Kvervlinga (curl) til ein vektor	120
6.4.7	Derivasjon med omsyn på ein parameter	122
6.4.8	Kovariant derivasjon, oppsummering	122
6.5	Riemannsk geometri	123
6.5.1	Parallell-flytting av vektorar	124
6.5.2	Geodesiske kurver	125
6.5.3	Geodesiske koordinatar	127
6.5.4	Krummingstensoren	128
6.5.5	Eit flatt (Euklidsk) rom	132
A	Andregradsflater	137
A.1	Ulike flatetypar	137
A.2	Karakterisering av flatepunkt	140
B	Riemannsk rom, krummingstensoren	145
B.1	Flater i R^3	145
B.2	Flatekurver	146
B.3	Flatekrumming	147
B.4	Krummingstensoren	150

INNHALD

Kapittel 1

ROMKURVER

1.1 INNFØRING

Frå problemet med å studera kurver i planet (x, y -planet) veit vi at ein kan definera ei kurve ved hjelp av ei parameter framstilling

$$x = \phi(t) \quad \text{og} \quad y = \psi(t). \quad (1.1)$$

For eit fast verde av $t = t_0$ vil vi få eit fast verde av x og y , dersom funksjonane ϕ og ψ er eintydige ($x = x_0 = \phi(t_0)$ og $y = y_0 = \psi(t_0)$). Vi seier då at (x_0, y_0) definerer eit punkt i planet. Når t varierer innafor eit intervall t.d. $t \in [a, b]$, så vil likn. (1.1) definera ei punktmengde i planet. Denne punktmengda kallar vi ei kurve. No er det eit problem i analysen å bli samde om kva slag type punktsamlingar det er rimeleg å kalla kurver. Det er også visse problem knytt til det å definera kva ein meiner med lengda av ei kurve, eller eit kurvestykke. Vi skal ikkje gå inn på desse problema her på annan måte enn at vi skal avgrensa oss til *kurver* der slike problem ikkje dukkar opp. I tre dimensjonar er det rimeleg å definera ei kurve som

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (1.2)$$

Vi seier då at vi har ei parameterframstilling for ei tredimensjonal kurve, *ei romkurve*. For eit fast verde av $t = t_0$ har vi $x = x_0 = \phi(t_0)$, $y = y_0 = \psi(t_0)$, $z = z_0 = \chi(t_0)$. Vi skal kalla dei elementa i R^3 som er definerte ved koordinatane x_0, y_0, z_0 for punkt på romkurva. Dersom funksjonane ϕ, ψ og χ er eintydige, så vil det vera eitt og berre eitt punkt P_0 med koordinatar (x_0, y_0, z_0) svarande til $t = t_0$. Til punktet P_0 kan vi tilordna ein vektor som startar i origo og sluttar i P_0 , det vi skal kalla *posisjonsvektoren* til P_0 . Vi skriv

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \phi(t)\mathbf{e}_1 + \psi(t)\mathbf{e}_2 + \chi(t)\mathbf{e}_3, \quad (1.3)$$

der $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ er ein ortonormal kartesisk basis. Posisjonsvektoren til P_0 er då $\mathbf{r}(t_0)$. Det er no klårt at $\mathbf{r}(t)$ gjeven ved likn. (1.3) definerer ein vektor- funksjon av ein variabel. *Legg merke til at det er ikkje turvande at alle funksjonane $\phi(t)$, $\psi(t)$ og $\chi(t)$ er ein eintydige for $t \in [a, b]$, for at vektorfunksjonen $\mathbf{r}$ skal vera ein eintydig.* Vi skal straks sjå eit døme på det, men først skal vi formelt definera kva vi meiner med ei romkurve.

Definisjon 1.1 *Lat $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vera ein vektorfunksjon med $t \in [a, b]$. Biletmengda $\Gamma = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]\}$ kallar vi for ei romkurve. Vi kallar t for ein parameter og seier at*

$$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i \quad (1.4)$$

er ei parameterframstilling av romkurva. Dersom vi vidare har at $\mathbf{r}$ er:

1) ein-eintydig

2) har ein kontinuerleg derivert

3) har $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| \neq 0$,

så seier vi at romkurva er regulær, og har ei regulær parameter framstilling.

Merk at vi ovanfor har nytta det som gjerne vert kalla Einsteins summasjons konvensjon. Denne konvensjonen seier:

Dersom ein har to like indeksar i eit uttrykk eller på ein storleik, så skal ein summera over denne indeksen frå 1 til n , der n er det største verdet indeksen kan ha.

Omgrepet romkurve er etter definisjon 1.1 knytt til ei mengde, eller ei punktsamling i R^3 . Ei og same romkurva kan genererast av ulike parameterframstillingar. Lat oss sjå litt på det. Lat

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i \equiv x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3. \quad (1.5)$$

vera ei gjeven romkurve. Definer ein ny skalarfunksjon slik at $t = \phi(u)$ og $\phi'(u) \neq 0$, $u \in [a', b']$ når $t \in [a, b]$, og tre nye skalar-funksjonar $\bar{x} = \bar{x}_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, slik at

$$\bar{x}_i(u) = x_i\{\phi(u)\}. \quad (1.6)$$

Vi har då at

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u) = \bar{x}_i(u)\mathbf{e}_i \quad (1.7)$$

er ei romkurve som fell saman med kurva gjeven ved likn. (1.5). Vis dette. Vi seier at romkurva er gjeven ved ei anna parameter-framstilling. Ved derivasjon av likn. (1.7) får vi

$$\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du} \frac{1}{\phi'(u)}, \quad (1.8)$$

og då $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$, har vi $\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ som til saman gjev

$$\left| \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{du} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| |\phi'(u)| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \phi'(u). \quad (1.9)$$

Frå likn. (1.9) ser vi at

$$\phi'(u) \neq 0, \quad u \in [a', b'] , \quad (1.10)$$

er både eit nødvendig og tilstrekkeleg vilkår for at den nye parameter-framstillinga skal vera regulær. Vilkåret, likn. (1.10) heng saman med det inverse funksjonsteoremet. Berre når $\phi'(u) \neq 0$ vil det vera ein-eintydig samanheng mellom u og t . I det følgjande skal vi studera regulære romkurver. I likn. (1.9) har vi gått ut frå at $\phi'(u) > 0$. Kvifor kan vi gjera eit slikt val?

Døme: Skrulina eller ein heliks er gjeven ved

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{e}_1 + \cos t \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3. \quad (1.11)$$

Skisser denne kurva.

1.2 BOGELENGDA

Bogelengda for ei regulær romkurve er definert tilsvarande som for plane kurver.

Definisjon 1.2 Lat $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ vera ei regulær romkurve. Bogelengda s frå a til b er då:

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1.12)$$

For regulære romkurver er $\mathbf{r}'(t)$ kontinuerleg, difor vil alltid “*bogelengde integralet*” eksistera for slike romkurver.

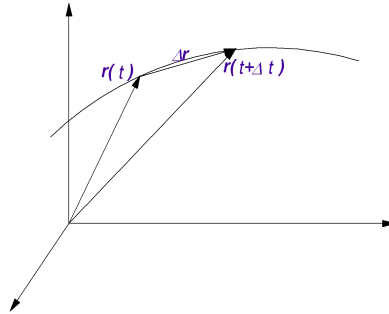
Oppgåve: Finn bogelengda for skrulina frå $t = 0$ til $t = 4\pi$.

1.3 TANGENTVEKTOREN

Lat det vera gjeven ei regulær romkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Vi ser på vektoren

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \quad (1.13)$$

Denne vektoren kan vi geometrisk tolka som korden mellom punkta på romkurva som har parameterverdiane t og $(t + \Delta t)$.



Tangentvektoren (kordevektoren)

Når vi går til grensa $\Delta t \rightarrow 0$, så vil vi få ein vektor med ein retning som er grense-retningen for denne korden. Det er rimeleg å kalla dette for tangent-retningen.

Definisjon 1.3 Lat $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ definera ei regulær romkurve. Tangentvektoren til denne romkurva har då same retning som $d\mathbf{r}/dt$.

Døme: Lat kurva vera plan, altså

$$x_1 = \phi(t), x_2 = \psi(t), x_3 = 0 \quad (1.14)$$

Vi har då

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \phi'(t)\mathbf{e}_1 + \psi'(t)\mathbf{e}_2. \quad (1.15)$$

Frå definisjonen av tangenten til ei plan kurve i punktet med parameter verdi $t = t_0$, har vi at likninga for denne er

$$(x_2 - \psi(t_0)) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}(x_1 - \phi(t_0)). \quad (1.16)$$

Eller på vektorform

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\phi'(t_0)\mathbf{e}_1 + \psi'(t_0)\mathbf{e}_2)\tau, \quad (1.17)$$

der

$$\mathbf{r}_0 = \phi(t_0)\mathbf{e}_1 + \psi(t_0)\mathbf{e}_2 \text{ og } \tau \in [-\infty, +\infty], \quad (1.18)$$

er ein parameter. Vi ser då at $d\mathbf{r}(t)/dt$ er parallell med denne rette lina.

Oppgåve: Finn tangentvektoren til skrulina

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3. \quad (1.19)$$

Frå definisjon 1.3 har vi at einingstangentvektoren $\mathbf{T}$ til romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ er gjeven ved

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|}. \quad (1.20)$$

Vi har før sett at vi står fritt til å velja mellom ulike parameter framstillingar av ei romkurve. Lat oss no velja bogelengda s gjeven ved (definisjon (1.2)) som parameter. Altså,

$$s = s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau, \quad (1.21)$$

der $t \in [a, b]$. Vi har då at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} |\mathbf{r}'(t)|, \quad (1.22)$$

som syner at

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}. \quad (1.23)$$

Dette resultatet gjer at mange formalar vert enklare når ein brukar bogelengda som parameter. Overgangen frå ein vilkårleg parameter t til bogelengda s , får ein då ved å bruka likn.(1.22). Merk at

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = |\mathbf{r}'(t)| \frac{d}{ds}, \quad (1.24)$$

eller

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \frac{d}{dt}. \quad (1.25)$$

1.4 KRUMMING

Som eit mål for krumminga til ei romkurve skal vi sjå på kor fort tangentvektoren $\mathbf{T}(s)$ skifter retning når vi går langs romkurva. (Merk at vi no brukar bogelengda som parameter). Eit mål for dette får vi ved å derivera $\mathbf{T}(s)$.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}. \quad (1.26)$$

Her har vi pr. definisjon at $\mathbf{N}$ er hovudnormalvektoren til kurva og $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Likn. (1.26) definerer difor to nye omgrep: (1) *Hovudnormalvektoren* og (2) *Krumminga* $\kappa \geq 0$.

Døme: Lat

$$\mathbf{r}(t) = \phi(t) \mathbf{e}_1 + \psi(t) \mathbf{e}_2, \quad (1.27)$$

vera ei plan kurve, vi har då

$$\mathbf{T} = \frac{\phi'(t)\mathbf{e}_1 + \psi'(t)\mathbf{e}_2}{\{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.28)$$

og

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\phi''\psi' - \psi''\phi'}{(\phi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\psi'\mathbf{e}_1 - \phi'\mathbf{e}_2}{(\phi'^2 + \psi'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.29)$$

Gjennomfør mellomrekningane! Legg merke til at $d\mathbf{T}/ds$ står loddrett på $\mathbf{T}$. Vis dette! Vi har difor at $\mathbf{N}$ også står loddrett på $\mathbf{T}$.

For $\phi(t) = t$ og $\psi(t) = f(t)$ har vi at $y = f(x)$, vi får då

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{N}. \quad (1.30)$$

Altså har vi dei to alternative formlane

$$\kappa = \frac{|\phi''\psi' - \psi''\phi'|}{(\phi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.31)$$

og

$$\kappa = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.32)$$

Lat så $x_1 = R \cos t$, $x_2 = R \sin t$, $x_3 = 0$. Altså ein sirkel i planet $x_3 = 0$ med radius R . Vi har då,

$$\psi' = R \cos t, \quad \psi'' = -R \sin t, \quad (1.33)$$

$$\phi' = -R \sin t, \quad \phi'' = -R \cos t, \quad (1.34)$$

$$\kappa = \frac{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{R^3(\sin^2 t + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}. \quad (1.35)$$

Vi skal definera $\rho = 1/\kappa$ som krummingsradien til romkurva med krumming κ .

1.4.1 Binormal og torsjon

Tangentvektoren og hovudnormalvektoren definerer eit plan, *smygplanet* eller *oskulasjonsplanet*. Finn likninga for dette planet!

Vi har at vektoren

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \quad (1.36)$$

står normalt på dette planet. $\mathbf{B}$ kallar vi for *binormalvektoren* til romkurva. Merk at $\mathbf{B}$ på same måten som $\mathbf{T}$ og $\mathbf{N}$ er einingsvektorar. Eit mål for kor sterkt romkurva “vrir” seg får vi ved å ta den deriverte av $\mathbf{B}$. No har vi at

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0. \quad (1.37)$$

Kvifor?

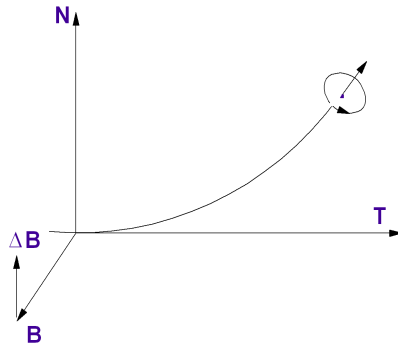
Vidare har vi ved derivasjon av likn. (1.36) at

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}. \quad (1.38)$$

og vi har at $d\mathbf{T}/ds \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$, kvifor? Likn. (1.36) viser difor at vektoren $d\mathbf{B}/ds$ står normalt på $\mathbf{T}$ og vi har også at at same vektoren står normalt på $\mathbf{B}$, kvifor? Av dette følgjer det at vektoren $d\mathbf{B}/ds$ må ha same retning som $\mathbf{N}$ og vi kan skriva

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}, \quad (1.39)$$

der proporsjonalitetsfaktoren τ er definert som *torsjonen* til kurva.



Torsjonen til ei romkurve

Torsjonen τ er positiv dersom kurva er høgrevridd d.v.s. dersom ein legg høgre hand rundt kurva med tommelfingeren i tangentretningen, så vrir kurva seg i retning av fingrane når $\tau > 0$. Vis det ut frå figuren ovanfor. Tilsvarende seier vi at kurva er venstrevridd når $\tau < 0$.

1.5 FRENETS FORMLAR

Dei tre likningane

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad (1.40)$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \quad (1.41)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}, \quad (1.42)$$

kallar vi for Frenets formlar. Vi har alt vist den første og den siste av desse formlane. Den andre kan ein visa slik:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}, \quad (1.43)$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad (1.44)$$

$$= -\tau\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times (\kappa\mathbf{N}) \quad (1.45)$$

$$= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \quad (1.46)$$

Vi ser difor at eit mål for dreinga til hovudnormalvektoren er K , der K er gjeven ved

$$K = \left| \frac{d\mathbf{N}}{ds} \right| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}. \quad (1.47)$$

Storleiken K kallar ein for totalkrumminga til kurva.

EIT FUNDAMENTALT TEOREM

Teorem 1.1 *To romkurver som har same krumming og torsjon som funksjon av bogelengda er kongruente.*

Prov:

- Lat romkurvene ha likningane $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s)$ og $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s)$ med tilsvarende tangentvektor, hovednormalvektor og binormalvektor $\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_1$ og $\mathbf{T}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}_2$. Lat oss gå ut frå at kurvene startar frå same punkt og lat

oss orientera dei slik at vektortrippela $\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_1$ og $\mathbf{T}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}_2$ fell saman i dette punktet. Lat oss så definera skalarfunksjonen

$$f(s) = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2. \quad (1.48)$$

Bruk Frenets formalar til å visa at $df/ds = 0$, altså $f(s) = k$, der k er ein konstant. Merk at $f(0) = 3$, etter føresetnaden vi gjorde, altså er $f(s) = 3 \forall s$. Men uttrykket for $f(s)$ viser at $f(s) \leq 3 \forall s$, og det er berre lik når dei to vektor trippela fell saman, altså har vi $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2, \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2, \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \forall s$. Frå den første av desse likningane har vi at

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_2}{ds} \rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \quad (1.49)$$

der den konstante vektoren $\mathbf{a}$ må vera nullvektoren. Kvifor? Vi har difor at

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}_2(s) \quad \forall s, \quad (1.50)$$

altså fell romkurvene saman.

Q.E.D.

Oppgåver:

1. Vis at likninga for hovudnormalen kan skrivast som

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa} \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \quad u, \quad u \in (-\infty, \infty).$$

2. Vis at $\kappa = \left| \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \right|$.
3. Finn $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ og $\mathbf{B}$ for skrulina

$$\mathbf{r} = \{-a \sin t, a \cos t, bt\}.$$

Finn også, krummingsradius, torsjon og totalkrumning.

4. Vis at alle kurver som har krumning lik null må vera rette liner.

5. Vis at alle kurver som har torsjon lik null må vera plane kurver.
6. Gjeve romkurva $\mathbf{r}(t) = \{1+t, -t^2, 1+t^3\}$. Finn likninga for tangenten i punktet med parameterverde $t = 1$. Finn likninga for normalplanet i same punkt (planet gjennom hovudnormalen og binormalen).
7. Finn skjæringskurva mellom tangentane til skrulina

$$\mathbf{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\},$$

og $x - y$ -planet.

8. Vis at torsjonen for ei kurve

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \text{er gjeven ved}$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}.$$

Kapittel 2

Dyadar

2.1 RESIPROKE VEKTORSETT

Definisjon 2.1 *Gjeve eit sett av tre lineært uavhengige vektorar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in R^3$. Settet $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 \in R^3$ kallast det resiproke settet dersom følgjande relasjonar er stetta*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad i, j = 1, 2, 3$$

der δ_i^j er Kronecker's delta, som er null når $i \neq j$ og elles lik ein.

Teorem 2.1 *Det er gjeve tre lineært uavhengige vektorar. Det eksisterer då eit resiprokt sett av lineært uavhengige vektorar som er eintydig bestemt.*

Prov: Lat dei tre lineært uavhengige vektorane vera $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$. Lat oss gå ut frå at det finst eit resiprokt sett og lat dette vera $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ og $\mathbf{e}^3$. Då har vi

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 0 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^1 = 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = 0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = 1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^2 = 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^3 = 0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^3 = 0 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = 1 \end{array}$$

Den første lina av likningar syner at $\mathbf{e}^1$ står normalt på $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ altså må vi ha

$$\mathbf{e}^1 = \lambda(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad (2.1)$$

og frå $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1$ har vi $\lambda = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]^{-1}$. Tilsvarende finn vi for dei andre vektorane $\mathbf{e}^2$ og $\mathbf{e}^3$, eit resultat som vi også får ved syklisk permutasjon av indeksane, altså har vi

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]}. \quad (2.2)$$

Vi ser at $\mathbf{e}^1 \ \mathbf{e}^2 \ \mathbf{e}^3$ er eintydig bestemt og vidare har vi

$$[\mathbf{e}^1 \ \mathbf{e}^2 \ \mathbf{e}^3] = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]} \times \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]} \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]} = \frac{1}{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]} \neq 0. \quad (2.3)$$

Altså er $\mathbf{e}^1 \ \mathbf{e}^2 \ \mathbf{e}^3$ lineært uavhengige.

Q.E.D.

Vi har elles brukt notasjonen

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] \equiv \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Dette vert ofte kalla for volum-produktet eller boks-produktet”.

2.2 LINEÆRE VEKTORFUNKSJONAR

Dersom det til ein kvar vektor $\mathbf{r} \in R^3$ er tilordna ein vektor $\mathbf{v} \in R^3$, seier vi at $\mathbf{v}$ er ein vektorfunksjon av $\mathbf{r}$ og skriv

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Ein vektorfunksjon er kontinuerlig i $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ dersom

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_0). \quad (2.5)$$

(Jfr. Apostol II 8.4)

Definisjon 2.2 *Ein vektorfunksjon er lineær når*

$$\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{s}), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{f}(\lambda \mathbf{r}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

for vilkårlege $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ og λ

(Det kan visast at når ein vektorfunksjon er kontinuerlig og 2.6 er oppfylt, så følgjer 2.7 av dette.)

Vis at 2.6 og 2.7 medfører at ein lineær vektorfunksjon er kontinuerleg. Vink: vis først at $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Teorem 2.2 *Ein lineær vektorfunksjon er eintydig bestemt når $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}_2)$ og $\mathbf{f}(\mathbf{a}_3)$ er kjende, der $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ er eit vilkårleg valt sett av vektorar som ikkje er koplanare ($[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] \neq 0$).*

Prov: Med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ som basis kan vi skriva

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + x^3 \mathbf{a}_3. \quad (2.8)$$

Då er

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = x^1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) + x^2 \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) + x^3 \mathbf{f}(\mathbf{a}_3). \quad (2.9)$$

Lat $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ vera det resiproke settet til $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{f}(\mathbf{a}_i) \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Då er

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i. \quad (2.11)$$

Q.E.D.

Sidan $\mathbf{a}^i$ og $\mathbf{b}_i$ er kjende, er $\mathbf{f}$ eintydig bestemt. (Merk at $x^i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}^i = x^j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^i = x^j \delta_j^i = x^i$).

Vi har altså dette resultatet:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}^3 \mathbf{b}_3) = (\mathbf{b}_1 \mathbf{a}^1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}_3 \mathbf{a}^3) \cdot \mathbf{r}. \quad (2.12)$$

Vi kan no oppfatta uttrykket i parentesen,

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}^3 \mathbf{b}_3, \quad (2.13)$$

eller

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{a}^1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}_3 \mathbf{a}^3, \quad (2.14)$$

som ein operator som formidlar den lineære transformasjonen gjennom ein skalar multiplikasjon. Vi merkar oss at desse uttrykka, som er ein formell

samanstilling av vektorar, ikkje sjølv kan vera ein vektor, sidan resultatet ein får når ein skalarmultipliserer dette uttrykket med ein vektor vert ein ny vektor. Uttrykk som dei ein har i 2.13 og 2.14 kallar ein gjerne for ein sum av ubestemte vektorprodukt.

Definisjon 2.3 *Ein sum av ubestemte vektorprodukt kallar vi ein dyade.*

Lat dyaden Φ vera gjeven som

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i. \quad (2.15)$$

Vi kallar $\mathbf{a}_i$ for førefaktorar og $\mathbf{b}_i$ for etterfaktorar. Dersom ein stiller spørsmålet om kva ein dyade eigentleg er, så er det ikkje noko anna enn ein formell samanstilling av vektorar. Vi har alt sett at dyaden har den eigenskapen at når ein skalarmultipliserer med ein vektor framanfrå eller bakanfrå, så vert resultatet ein ny vektor. Men dei to vektorane ein får i desse to tilfella er til vanleg ulike. Altså er det ikkje det same kva side vi multipliserer frå. Noko liknande har vi alt kjennskap til frå matrisemultiplikasjon med ein vektor. I det heile skal vi sjå at dyadar eigentleg er ei alternativ form for matriserekning.

2.3 ALGEBRA FOR DYADAR

2.3.1 Reknereglar

Vi har altså

$$\mathbf{r} \cdot \Phi = \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i, \quad (2.16)$$

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r}. \quad (2.17)$$

I det ålmenne tilfellet har vi at

$$\mathbf{r} \cdot \Phi \neq \Phi \cdot \mathbf{r} \quad (2.18)$$

Definisjon 2.4 *To dyadar Φ og Ψ er like dersom og berre dersom $\Phi \cdot \mathbf{r} = \Psi \cdot \mathbf{r}$ for alle $\mathbf{r}$*

Likskap medfører at $\mathbf{s} \cdot \Phi = \mathbf{s} \cdot \Psi$ for alle $\mathbf{s}$. Lat $\mathbf{s}$ vera fritt vald. Tak likninga

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = \Psi \cdot \mathbf{r} \quad (2.19)$$

og skalar multipliser med $\mathbf{s}$, då får vi:

$$\mathbf{s} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{s} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{s} \cdot (\Psi \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{s} \cdot \Psi) \cdot \mathbf{r}. \quad (2.20)$$

Sidan det følgjer frå konstruksjonen av ein dyade at det er det same i kva rekkjefølgje ein utfører dei to skalarmultiplikasjonane. Frå uttrykket

$$(\mathbf{s} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{s} \cdot \Psi) \cdot \mathbf{r}, \quad (2.21)$$

eller

$$(\mathbf{s} \cdot \Phi - \mathbf{s} \cdot \Psi) \cdot \mathbf{r} = 0, \quad (2.22)$$

har vi at

$$\mathbf{s} \cdot \Phi - \mathbf{s} \cdot \Psi = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

sidan $\mathbf{r}$ er vilkårleg. Altså

$$\mathbf{s} \cdot \Phi = \mathbf{s} \cdot \Psi. \quad (2.24)$$

Q.E.D.

Definisjon 2.5 *Ein dyade Φ er null dyaden dersom og berre dersom $\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{r}$.*

Vi har no at dersom Φ er nulldyaden, så er også

$$\mathbf{s} \cdot \Phi = \mathbf{0} \quad \text{for alle} \quad \mathbf{s}. \quad (2.25)$$

Vis dette.

Definisjon 2.6 *Addisjon:* Lat Φ og Ψ vera to dyadar då er

$$(\Phi + \Psi) \cdot \mathbf{r} = \Phi \cdot \mathbf{r} + \Psi \cdot \mathbf{r} . \quad (2.26)$$

Lat

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \text{ og } \Psi = \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i \mathbf{d}_i , \quad (2.27)$$

då er

$$\Phi + \Psi = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i \mathbf{d}_i , \quad (2.28)$$

og ein kan naturlegvis byta om rekkjefølgja på addendane i desse summane som ein vil. Den distributive lova gjeld for dyadar

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c} . \quad (2.29)$$

Dette viser ein lett ved å bruka definisjonen på likskap. Vi kan såleis utføra multiplisering som i vanleg algebra, men ein må alltid passa på å ikkje byta om faktorane i dei ubestemte vektorprodukta,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{d} . \quad (2.30)$$

Dersom λ er ein skalar, har vi

$$(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a}\mathbf{b} , \quad (2.31)$$

der den siste skrivemåten førebels må tolkast som ein av dei to første.

Teorem 2.3 *Ein vilkårleg dyade over R^3 kan alltid reduserast til summen av tre ledd.*

Lat Φ vera gjeven som

$$\Phi = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n , \quad (2.32)$$

lat $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vera ein basis for R^3 . Då er $\mathbf{a}_i = a_i^1 \mathbf{e}_1 + a_i^2 \mathbf{e}_2 + a_i^3 \mathbf{e}_3, \forall i$, og vi har

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{i=1}^n (a_i^1 \mathbf{e}_1 + a_i^2 \mathbf{e}_2 + a_i^3 \mathbf{e}_3) \mathbf{b}_i \\ &= \mathbf{e}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{f}_3 \text{ der} \\ \mathbf{f}_1 &= \sum_{i=1}^n a_i^1 \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{f}_2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{b}_i \text{ og } \mathbf{f}_3 = \sum_{i=1}^n a_i^3 \mathbf{b}_i.\end{aligned}$$

Tilsvarende kan ein også redusera Φ til tre ledd ved å skrive

$$\mathbf{b}_i = b_i^1 \mathbf{e}_1 + b_i^2 \mathbf{e}_2 + b_i^3 \mathbf{e}_3. \quad (2.33)$$

Q.E.D.

2.3.2 Komplette dyadar

Lat $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vera ein vilkårleg basis. Vi har då at Φ kan skrivast som

$$\Phi = \mathbf{g}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.34)$$

Lat vektoren $\mathbf{r}$ skrivast som

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}^i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3, \quad (2.35)$$

der $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ er det resiproke settet til $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Av dette følgjer det at

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2 + x_3 \mathbf{g}_3. \quad (2.36)$$

Relasjonen (2.36) fortel oss at dersom vi set

$$\mathbf{r}' = \Phi \cdot \mathbf{r}, \quad (2.37)$$

så vil $\mathbf{r}'$ ved høveleg val av $\mathbf{r}$, kunna nå fram til eit vilkårleg punkt i R^3 dersom $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ er ein basis. Vi seier i dette høvet at Φ representerer ein affin transformasjon av R^3 på R^3 . Elles merkar vi oss at origo er uendra under transformasjonen.

Definisjon 2.7 *Ein dyade er komplett dersom den representerer ein affin transformasjon.*

Resultata ovanfor kan vi samla i:

Teorem 2.4 *Dyaden gjeven ved likn. (2.34) er komplett dersom og berre dersom $[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] \neq 0$*

Teorem 2.5 *Ein komplett dyade har meir enn to ledd.*

Dersom vi har

$$\Phi = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{d}, \quad (2.38)$$

så er

$$\mathbf{r}' = \Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c}\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}. \quad (2.39)$$

Men då er $\mathbf{r}'$ bunden til planet som går gjennom origo og er utspent av vektorane $\mathbf{a}$ og $\mathbf{c}$. Ein slik dyade kallar ein gjerne planar. Tilsvarande finn ein at om dyaden har berre eit ledd, så er dyaden lineær. I dette høvet vil R^3 bli avbilda på ei rett line. Planare og lineære dyadar svarar til matriser med rang 2 og 1.

Slike dyadar kallar ein singulære.

Teorem 2.6 $\Phi = \mathbf{a}\mathbf{f} + \mathbf{b}\mathbf{g} + \mathbf{c}\mathbf{h}$ er komplett dersom og berre dersom $[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] \neq 0$ & $[\mathbf{f}\mathbf{g}\mathbf{h}] \neq 0$.

Provet for dette overlet vi til lesaren.

Korollar til teorem 2.6:

Korollar 2.1 *Dersom Φ er komplett har vi $\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{0}$.*

Prov: $\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a}\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{b}\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c}\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}$.

Sidan $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er ein basis og $\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}$, så må $\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = 0$, men då $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ og $\mathbf{h}$ også er ein basis, må vi ha $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

2.3.3 Den konjugerte dyaden

Definisjon 2.8 Den konjugerte dyaden Φ_c til ein dyade Φ , får ein ved å lata førefaktorane og etterfaktorane byta plass i alle ledd.

Når

$$\Phi = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \dots \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n, \quad (2.40)$$

har vi

$$\Phi_c = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2 + \dots \mathbf{b}_n \mathbf{a}_n. \quad (2.41)$$

Vi ser utan vidare at

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \Phi_c. \quad (2.42)$$

Merknad: Denne operasjonen svarar til transponering av matriser.

Definisjon 2.9 Ein dyade er symmetrisk dersom $\Phi = \Phi_c$ og antisymmetrisk dersom $\Phi = -\Phi_c$.

Teorem 2.7 Ein vilkårleg dyade kan skrivast som ein sum av ein symmetrisk og ein antisymmetrisk dyade.

Prov: Lat $\Psi = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$ og $\Omega = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$.

Ein har då at $\Phi = \Psi + \Omega$ der Ψ er symmetrisk og Ω antisymmetrisk.

Q.E.D.

2.3.4 Produkt av dyadar

Ein kan lett tenkja seg to eller fleire lineære transformasjonar etter kvarandre

$$\mathbf{v} = \Phi \cdot \mathbf{r} \text{ og } \mathbf{w} = \Psi \cdot \mathbf{v}. \quad (2.43)$$

Dette kan då gjennomførast som

$$\mathbf{w} = \Psi \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r}) = (\Psi \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r} \quad (2.44)$$

sidan dyadekonstruksjonen og skalarprodukta kan utførast i den orden ein ynskjer utan at det verkar inn på resultatet. Vi har at

$$\Psi \cdot \Phi \quad (2.45)$$

er ein ny dyade (lineær transformasjon) sidan $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ svarar til $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ og $\lambda \mathbf{w}$ til $\lambda \mathbf{r}$.

Definisjon 2.10 Lat Ψ og Φ vera to dyadar, då er operasjonen $\Psi \cdot \Phi$ definert slik at $(\Psi \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r} = \Psi \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r}) \forall \mathbf{r}$

Ut frå definisjon 2.10 kan ein lett visa følgjande resultat for dyadar

$$\Phi \cdot (\Psi + \Omega) = \Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot \Omega, \quad (2.46)$$

$$(\Psi + \Omega) \cdot \Phi = \Psi \cdot \Phi + \Omega \cdot \Phi, \quad (2.47)$$

$$\Phi \cdot (\Psi \cdot \Omega) = (\Phi \cdot \Psi) \cdot \Omega. \quad (2.48)$$

Ved å bruka den distributive lova for dyademultiplikasjon (2.29) og (2.30), så kan ein lett visa at når

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \text{ og } \Psi = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j, \quad (2.49)$$

så er

$$\Phi \cdot \Psi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{a}_i \mathbf{d}_j. \quad (2.50)$$

Vidare er

$$(\Phi \cdot \Psi)_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{b}_i \mathbf{d}_j \mathbf{a}_i = \Psi_c \cdot \Phi_c. \quad (2.51)$$

og

$$\mathbf{r} \cdot (\Phi \cdot \Psi) = (\Phi \cdot \Psi)_c \cdot \mathbf{r} = \Psi_c \cdot (\Phi_c \cdot \mathbf{r}). \quad (2.52)$$

Vi har difor

Teorem 2.8 *Den konjugerte av ein dyade som er laga av produktet av to dyadar er produktet av dei konjugerte dyadene tekne i motsett rekkjefølgje, altså: $(\Psi \cdot \Phi)_c = \Phi_c \cdot \Psi_c$.*

Teorem 2.9 *Dyaden som er laga av produktet av to dyadar Φ og Ψ er komplett dersom og berre dersom Φ og Ψ er komplette kvar for seg.*

Prov: Lat Φ og Ψ representerast som

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathbf{g}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}_3, \\ \Psi &= \mathbf{e}^1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}^2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}^3 \mathbf{f}_3,\end{aligned}$$

der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er ein basis og $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ er det resiproke settet. Dette er alltid mogeleg, jfr.teorem 2.3.

Vi finn då

$$\Phi \cdot \Psi = \mathbf{g}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{f}_3. \quad (2.53)$$

Av har difor at $\Phi \cdot \Psi$ er komplett dersom og berre dersom $[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] \neq 0$ og $[\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3] \neq 0$. Men dette er ekvivalent med at Φ og Ψ er komplette kvar for seg. Jfr.teorem 2.6.

Q.E.D.

2.3.5 Einingsdyaden

Definisjon 2.11 *Einingsdyaden I er definert slik at $\forall \mathbf{r} : I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}$*

For det første: Det eksisterer eit einingselement. Det ser vi slik: Lat $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ vera einingsvektorane i eit rett vinkla kartesisk koordinatsystem, då er

$$I = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}, \quad (2.54)$$

slik at

$$\begin{aligned}I \cdot \mathbf{r} &= (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \cdot (\mathbf{ix} + \mathbf{jy} + \mathbf{kz}) \\ &= \mathbf{ix} + \mathbf{jy} + \mathbf{kz} = \mathbf{r}.\end{aligned}$$

For det andre: Einingsdyaden er eintydig bestemt. Lat nemleg I' vera ein annan einingsdyade, då er

$$(I - I') \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{r}. \quad (2.55)$$

altså er $I - I'$ lik nulladyaden.

Det fins også andre representasjonar av einingsdyaden, vi har t.d.

Teorem 2.10 *Einingsdyaden I kan skrivast som*

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^3 \mathbf{e}_3,$$

dersom og berre dersom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er ein basis og $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ er det resiproke settet.

Prov: Lat oss skriva ein vilkårleg vektor

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 v^1 + \mathbf{e}_2 v^2 + \mathbf{e}_3 v^3 = \mathbf{e}^1 v_1 + \mathbf{e}^2 v_2 + \mathbf{e}^3 v_3. \quad (2.56)$$

Ved å ta produktet $I \cdot \mathbf{v}$ med dei to representasjonane i teorem 2.10, ser ein lett at $I \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, og ein har også $\mathbf{v} \cdot I = \mathbf{v}$ sidan einingsdyaden er symmetrisk. Det viser dei to representasjonane vi har i teorem 2.10. Vidare har vi at dersom

$$I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}^3, \quad (2.57)$$

og vi veit at I skal vera einingsdyaden, så medfører dette at $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ og $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ er resiproke sett.

Først skal vi visa at $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ må vera ein basis. Lat oss gå ut frå at dette ikkje er sant, nemleg at $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er koplanare. Lat så $\mathbf{v}$ vera ein vektor normalt på dette planet, då må

$$I \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{v}. \quad (2.58)$$

Etter føresetnaden må det siste uttrykket vera nullvektoren sidan $\mathbf{v}$ ikkje har nokon komponent i planet utspent av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, men dette er ei sjølv-motseiing dersom I er einingsdyaden, altså $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ må vera ein basis. Lat så det resiproke settet til denne basisen vera $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$. Då har vi

$$\mathbf{u}^i \cdot I = \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}^j = \delta_j^i \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \quad (2.59)$$

altså $\mathbf{u}^i = \mathbf{e}^i$ for $i = 1, 2, 3$.

Q.E.D.

2.3.6 Den inverse dyaden

Einingselementet gjev oss høve til å definera den inverse dyaden:

Definisjon 2.12 *To dyadar Φ og Ψ er inverse dersom $\Phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \Phi = I$. Og vi skriv $\Phi^{-1} = \Psi$, $\Psi = \Phi^{-1}$.*

Teorem 2.11 *Ein komplett dyade Φ har ein eintydig invers dyade Φ^{-1} .*

Lat $\Phi = \mathbf{e}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{f}_3$ der $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ er ein basis og $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ er ein basis. Lat vidare $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ og $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$ vera dei tilsvarande resiproke basisane, då er

$$\Phi^{-1} = \mathbf{f}^1 \mathbf{e}^1 + \mathbf{f}^2 \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^3 \mathbf{e}^3. \quad (2.60)$$

Det følgjer nemleg rett fram av denne representasjonen at

$$\Phi \cdot \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \cdot \Phi = I,$$

altså er den ein invers. Vis sjølv at denne iverse representasjonen er eintydig bestemt.

Oppgåve: Vis at $(\Phi \cdot \Psi \cdot \Omega)^{-1} = \Omega^{-1} \cdot \Psi^{-1} \cdot \Phi^{-1}$.

2.3.7 Ymse relasjonar med skalar og vektor produkt

Definisjon 2.13 *For n positivt heilt tal definerer vi*

$$\Phi^n = \Phi \cdot \Phi \cdot \Phi \dots \text{ opp til } n \text{ faktorar.}$$

$$\Phi^{-n} = (\Phi^{-1})^n = (\Phi^n)^{-1}.$$

Oppgåve: Vis at $\Phi^m \cdot \Phi^n = \Phi^{m+n}$ og $(\Phi^m)^n = \Phi^{m \cdot n}$.

Merk at på grunn av det ikkje kommuterende dyadiske produktet, vil til vanleg $(\Phi \cdot \Psi)^n$ ikkje vera lik $\Phi^n \cdot \Psi^n$.

Ved hjelp av den inverse dyaden kan ein lett løysa visse typar vektorlikningar. Dersom Φ er komplett har følgjande likningar eintydige løysningar:

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \cdot \Phi = \mathbf{b}, \quad \Phi \cdot \Psi = \Omega_1, \quad \Psi \cdot \Phi = \Omega_2, \quad (2.61)$$

der dei tilsvarande løysingane er

$$\mathbf{r} = \Phi^{-1} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{b} \cdot \Phi^{-1}, \quad \Psi = \Phi^{-1} \cdot \Omega_1, \quad \Psi = \Omega_2 \cdot \Phi^{-1}. \quad (2.62)$$

Dyaden $\Phi \times \mathbf{v}$ er nyttig i fleire samanhengar:

Definisjon 2.14 *Lat $\Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$. Då har vi*

$$\mathbf{v} \times \Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{v} \times \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \quad \text{og} \quad \Phi \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{v}.$$

Vidare har vi då følgjande relasjonar

$$\begin{aligned} (\Phi \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} &= \Phi \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}), & \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \Phi) &= (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \Phi, \\ \mathbf{r} \cdot (\Phi \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{r} \cdot \Phi) \times \mathbf{v}, & (\mathbf{v} \times \Phi) \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{v} \times (\Phi \cdot \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Set vi Φ lik I i desse relasjonane får vi

$$(I \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times I) = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{r} \cdot (I \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (\mathbf{v} \times I) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}. \quad (2.64)$$

Av dette følgjer det at

$$I \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times I, \quad (2.65)$$

$$(I \times \mathbf{v})_c = -I \times \mathbf{v}. \quad (2.66)$$

Vi har at $I \times \mathbf{v}$ -dyaden er antisymmetrisk og planar sidan den transformerer alle vektorar til vektorar som er loddrett på $\mathbf{v}$. Frå definisjon 2.14 finn vi at

$$\Phi \cdot (I \times \mathbf{v}) = \Phi \times \mathbf{v} \quad \text{og} \quad (I \times \mathbf{v}) \cdot \Phi = \mathbf{v} \times \Phi. \quad (2.67)$$

Dette resultatet viser at vi kan alltid omforma eit vektor produkt til eit dyadisk produkt med dyaden $I \times \mathbf{v}$.

For vilkårlige vektorar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}$ har ein

$$[I \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}, \quad (2.68)$$

slik at vi finn

$$I \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}. \quad (2.69)$$

Teorem 2.12 Lat $\Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ og $\Phi = -\Phi_c$, $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$.

Då er

$$\Phi = -\frac{1}{2} I \times \mathbf{w}.$$

Prov: Sidan $\Phi = -\Phi_c$ har vi

$$\begin{aligned} 2\Phi &= \Phi - \Phi_c = \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i) \\ &= -\sum_{i=1}^m I \times (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) = -I \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.3.8 Invariantar

Definisjon 2.15 Med invariant skal vi meine storleikar som er uavhengige av kva koordinatsystem ein representerer vektoren eller dyaden i.

Merk at operasjonane skalarprodukt og vektorprodukt kan definerast utan referanse til koordinatsystem. Det same gjeld naturlegvis det ubestemte vektorproduktet.

Definisjon 2.16 Lat dyaden $\Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ vera gjeven, vi definerer då følgjande invariantar:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i, \\
\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i, \\
\Phi_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j, \\
\phi_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j), \\
\phi_3 &= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^m (\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k)(\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}_k).
\end{aligned}$$

Skalarane ϕ_1 , ϕ_2 og ϕ_3 er gjerne kalla den første, andre og tredje skalaren til Φ , $\mathbf{v}$ vert kalla vektoren til Φ og Φ_2 vert kalla den andre dyaden av Φ . Oppgåve: Skriv ut desse invariantane når vi har

$$\Phi = \mathbf{a}\mathbf{l} + \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{c}\mathbf{n}. \quad (2.70)$$

Teorem 2.13 *Ein dyade er symmetrisk dersom og berre dersom vektorinvarianten er nullvektoren.*

Alle dyadar Φ kan etter teorem 2.7 skrivast som

$$\Phi = S + A. \quad (2.71)$$

Der $S = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$, $A = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$.

Vektoren til S : Lat $S = \Sigma \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ der $\Sigma \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = \Sigma \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i$ då S er symmetrisk,

$$\mathbf{v}_s = \Sigma \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i = \Sigma \mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i \Rightarrow \mathbf{v}_s = -\mathbf{v}_s \Rightarrow \mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

Frå teorem 2.12 har vi

$$A = -\frac{1}{2}I \times \mathbf{v}_A, \quad (2.73)$$

der $\mathbf{v}_A$ er vektoren til A som også er vektoren til Φ , sidan vektoren til S er nullvektoren. Altså finn vi

$$\Phi = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c) - \frac{1}{2}I \times \mathbf{v}, \quad (2.74)$$

eller

$$\Phi = \Phi_c - I \times \mathbf{v}. \quad (2.75)$$

Q.E.D

Teorem 2.14 *Det er eit turvande og tilstrekkeleg vilkår for at ein dyade skal vera:*

$$\begin{array}{ll} \text{komplett} & \phi_3 \neq 0, \\ \text{planar} & \phi_3 = 0, \Phi_2 \neq 0, \\ \text{lineær} & \Phi_2 = 0, \Phi \neq 0. \end{array}$$

Prov: Lat dyaden vera representert som

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{a}\mathbf{l} + \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{c}\mathbf{n}, \\ \phi_3 &= [\mathbf{abc}][\mathbf{lmn}], \end{aligned}$$

slik at $\phi_3 \neq 0 \Rightarrow [\mathbf{abc}] \neq 0$ og $[\mathbf{lmn}] \neq 0$. Dette viser første leddet i teoremet.

$$\phi_3 = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{abc}] = 0 \text{ eller } [\mathbf{lmn}] = 0. \quad (2.76)$$

Dyaden er då enten planar, lineær eller null-dyaden.

$$\Phi_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{l} \times \mathbf{m} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \mathbf{l} \times \mathbf{n} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{m} \times \mathbf{n}. \quad (2.77)$$

Anta at $[\mathbf{abc}] \neq 0$. Dersom dyaden er lineær, må vi ha $\mathbf{l} \parallel \mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ og $\Phi_2 = 0$. Vidare har ein at: $\Phi_2 = 0$ og $[\mathbf{abc}] \neq 0 \Rightarrow \mathbf{l} \parallel \mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ eller $\mathbf{m} = k_1 \mathbf{l}$ og $\mathbf{n} = k_2 \mathbf{l}$ som gjev $\Phi_2 = (\mathbf{a} + k_1 \mathbf{b} + k_2 \mathbf{c}) \mathbf{l}$ som syner at dyaden er lineær sidan $\Phi \neq 0$. Dette syner siste del av teoremet.

Vidare har ein dersom $\Phi_2 \neq 0$, kan ikkje dyaden vera lineær. Difor sidan dyaden er singulær (og ikkje lik null-dyaden), må vi ha at den er planar. Dette viser andre delen av teoremet.

Q.E.D.

2.3.9 Den adjungerte dyaden

Lat $\Phi = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$, som har den andre dyaden

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j,$$

har eigenskapen:

Teorem 2.15 $\Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} = \Phi_2 \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Prov:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{u} \times \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}, \\ &= \sum_{i,j=1}^{m,m} \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{m,m} \mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}, \\ \Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m,m} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j - \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{v} \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j. \end{aligned}$$

Merk at ein kan byta om indeksane i og j i den eine av formlane ovanfor og det svarar til nytt namn på summasjons- indeksane.

Det siste resultatet får ein ved å ta halve summen av uttrykka i den føregåande formelen.

No er: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{vw} - \mathbf{wv}) \cdot \mathbf{u}$,

og vi får

$$\Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \quad (2.78)$$

Her har vi også nytta at vi kan byta om $\times$ og $\cdot$ i volumproduktet $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Resultatet er at

$$\Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} = \Phi_2 \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \quad (2.79)$$

Q.E.D.

Definisjon 2.17 Den konjugerte av Φ_2 kallast den adjungerte av Φ . Vi har $\Phi_a = \Phi_{2c}$.

Teorem 2.16 $\Phi \cdot \Phi_a = \phi_3 I$ eller $\Phi^{-1} = \frac{1}{\phi_3} \Phi_a$.

Prov:

Vi skriv $\Phi = \mathbf{a}\mathbf{l} + \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{c}\mathbf{n}$ med

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{l} \times \mathbf{m} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \mathbf{l} \times \mathbf{n} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{m} \times \mathbf{n}, \\ \Phi_a &= \mathbf{l} \times \mathbf{m} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{l} \times \mathbf{n} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \mathbf{b} \times \mathbf{c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi \cdot \Phi_a &= [\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{n}]\mathbf{a} \mathbf{b} \times \mathbf{c} + [\mathbf{m}\mathbf{l}\mathbf{n}]\mathbf{b} \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ &\quad + [\mathbf{n}\mathbf{l}\mathbf{m}]\mathbf{c} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= [\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{n}] \{ \mathbf{a} \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \} .\end{aligned}$$

Lat det resiproke settet til $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vera $\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1$ og $\mathbf{c}^1$, då har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^1 &= \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]}, \\ \mathbf{b}^1 &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]}, \\ \mathbf{c}^1 &= \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]} .\end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned}\Phi \cdot \Phi_a &= [\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{n}][\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] \{ \mathbf{a}\mathbf{a}^1 + \mathbf{b}\mathbf{b}^1 + \mathbf{c}\mathbf{c}^1 \} \\ &= \phi_3 I .\end{aligned}$$

Q.E.D.

Merk at vi har då ein ny måte til å bestemma den inverse dyaden på.

2.3.10 Eigenvektorar

Definisjon 2.18 *Ein vektor $\mathbf{e}$ som stettar likninga $\Phi \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$ er ein eigenvektor til dyaden Φ og λ er eit eigenverde.*

Vi ser at eigenvektorane er slik at alle punkt som ligg på ei rett line $\mathbf{te}$, vert avbilda på denne lina. Dette er difor ein invariant retning for transformasjonane formidla ved dyaden Φ . Vidare ser vi på grunn av linearitet og homogenitet at ein kan normera $\mathbf{e}$ slik at $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$. Sidan vi har $I \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ kan vi også skriva dyade eigenverdi likninga som

$$(\Phi - \lambda I) \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (2.80)$$

Lat oss så skriva

$$\Psi = \Phi - \lambda I, \quad (2.81)$$

der

$$\Phi = \mathbf{a}\mathbf{l} + \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{c}\mathbf{n}, \quad (2.82)$$

$$\Psi = \mathbf{a}(\mathbf{l} - \lambda\mathbf{a}^1) + \mathbf{b}(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{b}^1) + \mathbf{c}(\mathbf{n} - \lambda\mathbf{c}^1), \quad (2.83)$$

og $\mathbf{a}^1, \mathbf{b}^1, \mathbf{c}^1$ er det resiproke settet til $\mathbf{abc}$, som er valt som eit ikkje koplanart sett.

Det er klårt at likn.(2.80) betyr at λ må veljast slik at Ψ er singulær, kvifor? Sidan $[\mathbf{abc}] \neq 0$, må vi då ha

$$(\mathbf{l} - \lambda\mathbf{a}^1) \times (\mathbf{m} - \lambda\mathbf{b}^1) \cdot (\mathbf{n} - \lambda\mathbf{c}^1) = 0$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{lmn}] - \lambda \{ [\mathbf{a}^1\mathbf{mn}] + [\mathbf{lb}^1\mathbf{n}] + [\mathbf{lmc}^1] \} \\ & + \lambda^2 \{ [\mathbf{a}^1\mathbf{b}^1\mathbf{n}] + [\mathbf{a}^1\mathbf{mc}^1] + [\mathbf{lb}^1\mathbf{c}^1] \} - \lambda^3 [\mathbf{a}^1\mathbf{b}^1\mathbf{c}^1] = 0 \quad . \end{aligned}$$

No har vi at

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}, \\ \mathbf{b}^1 &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]}, \\ \mathbf{c}^1 &= \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{abc}]}, \end{aligned}$$

slik at vi får

$$\begin{aligned}
[\mathbf{lmn}] &= \lambda \left\{ \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}{[\mathbf{abc}]} + \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}{[\mathbf{abc}]} + \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}{[\mathbf{abc}]} \right\} \\
&+ \lambda^2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{[\mathbf{abc}]} - \frac{\lambda^3}{[\mathbf{abc}]} = 0,
\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
[\mathbf{abc}][\mathbf{lmn}] &= \lambda \{ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \} \\
&+ \lambda^2 \{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \} - \lambda^3 = 0.
\end{aligned}$$

Og dette kan skrivast meir kompakt som

$$\lambda^3 - \lambda^2 \phi_1 + \lambda \phi_2 - \phi_3 = 0. \quad (2.84)$$

Dette kallar ein gjerne for eigenverdi-likninga til Φ -dyaden.¹ Til vanleg vil denne likninga ha tre røter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ og til kvar av desse verda av λ vil det svara ein eigenvektor. Desse røtene kallar ein eigenverda til dyaden.

Vi har at

$$\phi_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \phi_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad \phi_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.85)$$

Røtene λ_i kan vera reelle eller komplekse, dei kan alle vera ulike eller det kan vera samanfallande røter.

Når ein skal bestemma retningen for eigenvektoren svarande til ein viss $\lambda = \lambda_1$, skal vi først gå ut frå at Ψ er planar, altså

(A)

$$\Psi = \mathbf{dr} + \mathbf{es} = \Phi - \lambda_1 I, \quad (2.86)$$

lat λ vera kompleks, altså $\lambda = \alpha + i\beta$. Vi må då tillata at eigenvektoren er kompleks: $\mathbf{e} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, altså

$$[\Phi - (\alpha + i\beta)I] \cdot (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (2.87)$$

Vi skal gå ut frå at Φ er reell og då finn ein ved å ta real del og imaginær del av (2.87) at

¹Det er naturlegvis ikkje tilfeldig at dei tre skalarinvariantane er definerte slik at dei gjev koeffisientane i eigenverde likninga. Dette er elles eit nytt prov på at desse skalarane er invariantar.

$$\Phi \cdot \mathbf{a} - \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (2.88)$$

$$\Phi \cdot \mathbf{b} - \alpha \mathbf{b} - \beta \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.89)$$

I dette høvet (Φ reell), kjenner vi også eit anna eigenverde λ_2 . For ved å ta den kompleks konjugerte av likn.(2.87) finn ein

$$[\Phi - (\alpha - i\beta)I] \cdot (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (2.90)$$

Altså vil den komplekskonjugerte av λ_1 også vera eit eigenverde, og den kompleks konjugerte av eigenvektoren vil vera den tilhøyrande eigenvektoren.

Sidan vi har

$$\Psi \cdot (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad (2.91)$$

og at Ψ er planar, har vi

$$\Psi = \mathbf{dr} + \mathbf{es}, \quad (2.92)$$

og då vil $\mathbf{a} + i\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$ vera ein vektor som stettar likn.(2.91), altså ein eigenvektor. Vi har dessuten vist at

$$\mathbf{a} - i\mathbf{b} = (\mathbf{r} \times \mathbf{s})^*, \quad (2.93)$$

også er ein eigenvektor svarande til $\lambda = \lambda_1^*$. Dersom λ er kompleks, altså $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, så kan ikkje $\mathbf{a}$ vera parallell med $\mathbf{b}$, for vi har

$$\Phi \cdot (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) = (\alpha - i\beta)(\mathbf{a} - i\mathbf{b}), \quad (2.94)$$

og dersom

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= k\mathbf{a} \Rightarrow \\ \Phi \cdot \mathbf{a}(1 - ik) &= (\alpha - i\beta)(1 - ik)\mathbf{a}, \\ \Phi \cdot \mathbf{a} &= (\alpha - i\beta)\mathbf{a} \Rightarrow \beta = 0. \end{aligned}$$

(B) Dersom Ψ er lineær har vi

$$\Psi = \mathbf{gh}. \quad (2.95)$$

Alle vektorar $\mathbf{e}$ i planet loddrett på $\mathbf{h}$ vil då stetta likninga

$$\Psi \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (2.96)$$

og alle retningar i dette planet er difor invariante retningar. Men vi kan spesielt velja to ortogonale retningar i dette planet som ein basis for alle desse vektorane.

(C) Til slutt har vi det tilfellet at Ψ er null-dyaden. Då er alle retningar invariante retningar.

Vi skal sjå på eit døme med den andere dyaden.

Lat $\mathbf{u}' = \Phi \cdot \mathbf{u}$ og $\mathbf{v}' = \Phi \cdot \mathbf{v}$. Då har vi

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \Phi \cdot \mathbf{u} \times \Phi \cdot \mathbf{v} = \Phi_2 \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Dersom no $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er ein eigenvektor for Φ_2 , altså

$$\Phi_2 \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad (2.97)$$

så har vi

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \lambda \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (2.98)$$

Dette viser at eit invariant plan for Φ står loddrett på ein invariant retning for Φ_2 .

2.3.11 Symmetriske dyadar

Vi repeterer at når Φ er symmetrisk har vi $\Phi = \Phi_c$.

Teorem 2.17 *Symmetriske dyadar har relle eigenverde og eigenvektorar.*

Gå ut frå at $\lambda = \alpha + i\beta$. Då kan vi gjera følgjande utrekningar:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) &= (\alpha + i\beta)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \quad | \quad \mathbf{a} - i\mathbf{b} \\ \Phi \cdot (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) &= (\alpha - i\beta)(\mathbf{a} - i\mathbf{b}) \quad | \quad \mathbf{a} + i\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$[(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)] | \mathbf{a} + i\mathbf{b} |^2 = 0 \quad (2.99)$$

$$2i\beta | \mathbf{a} + i\mathbf{b} |^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad (2.100)$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \Phi \cdot (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) &= \alpha(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \Rightarrow \\ \Phi \cdot \mathbf{a} &= \alpha\mathbf{a}, \quad \Phi \cdot \mathbf{b} = \alpha\mathbf{b}. \end{aligned}$$

$\mathbf{b}$ er då med i klassen av løysingar for $\mathbf{a}$, sidan dei to siste likningane er like. Vi kan då velja $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Teorem 2.18 *Eigenvektorane til symmetriske dyadar svarande til ulike eigenverde er ortogonale.*

Prov:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \mathbf{e}_1 &= \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \Phi \cdot \mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_2 \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 &\Rightarrow \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem 2.19 *Dersom eigenverdelikninga har tre ulike røter, så kan ein skriva*

$$\Phi = \lambda_1 \mathbf{ii} + \lambda_2 \mathbf{jj} + \lambda_3 \mathbf{kk},$$

der $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ er ein ortogonal kartesisk basis.

Vi har då at den tilsvarande matrisa er diagonal. Frå teorem 2.2 og teorem 2.18, kan ein lett visa dette. Provet overlet vi til lesaren.

Dersom to røter er samanfallande vil det til $\lambda_2 = \lambda_3$ svara to eigenvektorar som er ortogonale. Vi har då dersom $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ at

$$\Phi = \lambda_1 \mathbf{ii} + \lambda_2 (\mathbf{jj} + \mathbf{kk}). \quad (2.102)$$

Svarande til den multiple rota λ_2 har vi då eit heilt plan der alle vektorane i dette planet er eigenvektorar.

Dersom alle tre eigenverda er samanfallande $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, kan ein visa at

$$\Phi = \lambda I. \quad (2.103)$$

I dette høvet er alle retningar ein eigenvektor.

Teorem 2.20 *Ein symmetrisk dyade kan alltid skrivast som*

$$\Phi = \alpha \mathbf{ii} + \beta \mathbf{jj} + \gamma \mathbf{kk},$$

der $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er eigenvektorane svarande til eigenverda α, β, γ . Og vi har

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{ii} + \frac{1}{\beta} \mathbf{jj} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{kk},$$

$$\Phi_2 = \beta\gamma \mathbf{ii} + \alpha\gamma \mathbf{jj} + \alpha\beta \mathbf{kk} = \Phi_a,$$

$$\Phi^n = \alpha^n \mathbf{ii} + \beta^n \mathbf{jj} + \gamma^n \mathbf{kk}.$$

Vi overlet provet av dette til lesaren.

2.4 Hamilton-Cayley likninga

Vi startar med å skriva

$$\Psi = \Phi - \lambda I. \quad (2.104)$$

Frå teorem 2.16 har vi

$$\Psi \cdot \Psi_a = \psi_3 I = f(\lambda) I. \quad (2.105)$$

Sjå likn.(2.84) og likningane som fører fram til denne for detaljar. Vidare har vi frå den måten vi har representert Ψ på i likn.(2.83) at

$$\Psi = \mathbf{a}(1 - \lambda \mathbf{a}^1) + \mathbf{b}(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{b}^1) + \mathbf{c}(\mathbf{n} - \lambda \mathbf{c}^1), \quad (2.106)$$

og Ψ_a er etter definisjon **2.17** slik at vi kan skriva

$$\Psi_a = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{C},$$

der $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ er dyadar som er uavhengige av λ .

Frå likn.(2.105) finn vi no

$$(\Phi - \lambda I) \cdot (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{C}) = (\phi_3 - \phi_2 \lambda + \phi_1 \lambda^2 - \lambda^3) I. \quad (2.107)$$

Sidan likn.(2.107) er ein identitet i λ , så følgjer det at

$$\Phi \cdot \mathbf{A} = \phi_3 I, \quad (2.108)$$

$$\Phi \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} = -\phi_2 I, \quad (2.109)$$

$$\Phi \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B} = \phi_1 I, \quad (2.110)$$

$$-\mathbf{C} = -I. \quad (2.111)$$

Multipliserer vi no likningane (2.108), (2.109), (2.110) og (2.111) etter tur med I , Φ , Φ^2 og Φ^3 og adderer desse likningane, så får ein

$$\phi_3 I - \phi_2 \Phi + \phi_1 \Phi^2 - \Phi^3 = 0.$$

Vi ser då at vi får ei likning $f(\lambda) = 0$ med λ innsett Φ dyaden og konstant leddet bytt ut med same leddet multiplisert med einings dyaden. Dette er **Hamilton - Cayley likninga**. Resultatet gjeld alle dyadar i R^3 . Ein kan også visa tilsvarane resultat for kvadratiske matriser i R^n .

Minimal likninga

Jamvel om alle dyadar stettar Hamilton - Cayley likninga, så kan det hende at dei stettar ei tilsvarande likning av mindre grad i λ . Vi har til dømes dersom

$$\Phi - \lambda I = 0$$

for eit eigenverde $\lambda = \lambda_1$, så er dette ei likning av mindre grad og vi har i dette tilfelle at minimal likninga for Φ er lineær. Dersom dyaden Φ kan skrivast som

$$\Phi = \lambda_1 I,$$

så har vi $\Psi = \Phi - \lambda I = (\lambda_1 - \lambda)I$ med $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$ og vi har Hamilton - Cayley likninga

$$(\Phi - \lambda_1 I)^3 = 0$$

Merk at produktet av to dyadar kan godt vera null-dyaden utan at nokon av faktorane er null-dyadar.

Dette temaet kan utdjupast vidare, men det vert ikkje høve til det her.

2.5 DERIVASJON

Vi kan godt ha at ein dyade er funksjon av ein parameter eller av romkoordinatane. Vi definerer den deriverte av ein dyade i samsvar med vanleg måte å definera ein derivert på. Lat oss sjå på ein dyade med berre eitt ledd:

$$\Phi = \mathbf{a}\mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t)\mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}. \end{aligned}$$

Her har vi gått ut frå at dyaden er funksjon av parameteren t . Alt går på vanleg måte bortsett frå at ein må passa på rekkjefølgja av faktorane i det ubestemte vektorproduktet. Dersom dyaden er samansett av fleire ledd, så ser ein lett at den vanlege regelen om derivasjon av ein sum gjeld også for dyadar. Dersom ein har derivasjon med omsyn på romkoordinatane ser ein lett at resultatet ovanfor gjeld når ein erstattar vanleg derivasjon med partiell derivasjon. Vi kjem attende til dette i neste bolk.

2.6 Sluttmerknad

Ubestemte vektorprodukt kan utvidast til fleire faktorar enn to. Ein får då dyadar, triadar o.s.b. Vi har då vore innom omgrep som skalar, vektor, dyade, triade o.s.b. alle desse omgrepa skal vi seinare (bolk 6) samla i eitt omgrep *tensor*.

Oppgåver:

1. Dersom tre punkt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ på ellipsoiden $\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r} = 1$ stettar likningane

$$\mathbf{u} \cdot \Phi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \Phi \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \Phi \cdot \mathbf{u} = 0,$$

så seier ein at desse posisjonsvektorane $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ lagar eit konjungert sett.

Vis at:

- (a) Vektorsetta $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ og $\Phi \cdot \mathbf{u}, \Phi \cdot \mathbf{v}, \Phi \cdot \mathbf{w}$, er resiproke sett.
- (b) $\Phi^{-1} = \mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{w}\mathbf{w}$.
- (c) For alle konjungerte sett $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ på ellipsoiden $\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r} = 1$, så er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \text{ og } [\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}],$$

konstantar.

2. For ein vilkårleg dyade Φ skal ein visa at

$$\mathbf{u} \cdot \Phi \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \Phi \cdot \mathbf{u} = \phi \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

der ϕ er vektoren til Φ .

3. Vis at $\mathbf{a}\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] I$.

Kapittel 3

UTVALDE EMNE FRÅ VEKTORANALYSEN

3.1 GRUNNLEGGJANDE OMGREP

3.1.1 Definisjonar

Vi skal i dette avsnittet sjå på gradient, divergens og kvervling (hvirvling, curl, rot).

Gradienten til ein skalarfunksjon $\phi(x_1, x_2, x_3)$ der x_1, x_2, x_3 er kartesiske rettinkla koordinater er gjeven som

Definisjon 3.1

$$\nabla \phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3 \text{ er einingsvektorar}). \quad (3.1)$$

Divergensen til ein vektorfunksjon $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ der $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ er gjeven som

Definisjon 3.2

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (3.2)$$

Kvervlinga (curl) til ein vektorfunksjon $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ er gjeven som

Definisjon 3.3

$$\nabla \times \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k . \quad (3.3)$$

Vi har her brukt summasjonskonvensjonen til Einstein, d.v.s. like indeksar skal summerast frå 1 til 3 og permutasjonssymbolet ϵ_{ijk} er 0 dersom to indeksar er like. Dersom alle indeksar er ulike er ϵ_{ijk} lik +1 når ijk er ein jamn (syklisk) permutasjon av 1, 2, 3 og -1 når ijk er ein odde permutasjon av 1, 2, 3.

Alle desse omgrepa er definerte og brukte i M 112, så vi skal berre kort gje ei fysisk tolkning av dei.

3.1.2 Gradient

Gradientar kan tolkast som syntesen av alle dei retningsderiverte, på den måten at projeksjonen av gradientvektoren på ein gjeven retning, representerer den retningsderiverte av ϕ i denne retningen. Vi har også at $\nabla\phi(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ er ein normalvektor til nivåflata

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = K \quad (\text{K er konstant}), \quad (3.4)$$

som går gjennom punktet (x_{10}, x_{20}, x_{30}) , d.v.s. $K = \phi(x_{10}, x_{20}, x_{30})$.

3.1.3 Divergens

Divergensen til vektoren $\mathbf{v}$ kan vi gje ei fysisk tolking med å sjå på volumintegralet

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} . \quad (3.5)$$

Her har vi brukt Gauss integralsats (divergensteoremet). V er eit volum og S den flata som avgrensar volumet. Lat volumet V , som vi integrerer over, vera lite. Ved å bruka mellomverde setninga for integral veit vi at det finst eit punkt $(x_1, x_2, x_3) \in V$ slik at

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \nabla \cdot \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) \int_V d\tau = V \nabla \cdot \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3). \quad (3.6)$$

Altså

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V} . \quad (3.7)$$

Dersom vi let V gå mot null, slik at alle diamentrar i V samstundes går mot null, vil vi i grensa få definert eit punkt som kan vera vilkårleg. Difor har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V}. \quad (3.8)$$

Sidan $\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ er eit mål for netto fluks av vektorfeltet $\mathbf{v}$ ut av flata S , så ser vi at $\nabla \cdot \mathbf{v}$ kan tolkast som nettofluksen ut av eit punkt i rommet. Dersom vi ser på feltlinene til vektorfeltet $\mathbf{v}$ (vi skal koma attende til desse), så vil feltliner oppstå når $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$, eller bli borte når $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$, i det punktet vi ser på. Vi talar i dette tilfellet om *kjelder* og *sluk*.

Dersom $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ i eit gjeve område, så kan det ikkje oppstå nye eller bli borte feltliner i dette området. Eit slikt felt går gjerne under namnet eit divergensfritt eller eit solenoidalt felt. Eit døme på eit slikt felt er det magnetiske feltet. Ein konsekvens av dette er at det ikkje eksisterer magnetiske monopolar. Trass i mange iherdige forsøk på å leita etter slike har ein enno ikkje lukkast i å finna magnetiske monopolar, konsekvensen av dette er konsist matematisk formulert i

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\mathbf{B} \text{ er magnetisk feltvektor}), \quad (3.9)$$

som er ei av Maxwells likningar.

For eit felt som ikkje er divergensfritt talar ein gjerne om kjelder og sluk for feltet. Feltlinene tek til i ei kjelde og blir borte eller sluttar i eit sluk. Eit døme på dette er det elektriske feltet. Feltlinene startar på dei positive ladningane (kjeldene) og sluttar på dei negative ladningane (sluka).

3.1.4 Kvervling (curl)

Kvervlinga (curl) til eit vektorfelt kan vi gje ei fysisk tolkning ved å sjå på flateintegralet (ved bruk av Stokes sats)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Her er C ei lukka kurve og S er ei flate som har C som rand. Vi kan tenkja oss at vi vel ei lita plan flate som har ein flatenormal som fell saman med ein av koordinataksane, t.d. x_k -aksen. Ved bruk av mellomverde- setninga har vi då at

$$[\nabla \times \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)]_k = \frac{\int_{C_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{A_k}, \quad (3.11)$$

der k står for k -komponenten, ved å gå til grensa slik at alle diamentrar i A_k går mot null samstundes finn vi at

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_k = \lim_{A_k \rightarrow 0} \frac{\int_{C_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{A_k}. \quad (3.12)$$

Integralet $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ kallar ein gjerne for sirkulasjonen til vektorfeltet $\mathbf{v}$ relativt til kurva C .

Dersom vi let $\mathbf{v}$ vera det vektorfeltet som svarar til væskefarten i ei væske, så kan ein visa at sirkulasjon svarar til det angulære momentet eller spinnnet til ein væskepartikkel. Difor er det eit vanleg symbol i litteraturen å skriva

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (3.13)$$

Meir generelt kan vi sjå på $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ som ei anna form for kjelde til vektorfeltet $\mathbf{v}$. Kjelder til vektorfeltet;

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0 \text{ og } \nabla \times \mathbf{v} \neq 0 \quad (3.14)$$

spelar ei fundamental rolle i teorien for vektorfeltet og vi skal koma attende til dette. Men det er ikkje berre slike felt som er viktige, vi kan også ha

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ og } \nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (3.15)$$

Denne klassen av felt kallar vi for Laplace-felt.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = 0 &\Rightarrow \mathbf{v} = \nabla \psi, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 &\Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \text{ (Laplace likning)}. \end{aligned}$$

Løysingar av Laplace likningar spelar ei sentral rolle i anvendt matematikk.

3.2 VEKTOR IDENTITETAR

Ut frå definisjonen av ∇ (grad- eller del-operatoren), bruk av summasjonskonvensjonen og manipulering med skalar og vektorprodukt, og utvikling av slike produkt, er det lett å visa ei rad med identitetar. Vi skal skriva opp dei mest vanlege og overlata til lesaren å visa dei: