$$\begin{aligned}
\nabla\,(\phi\mathbf{a}) &= \nabla\phi\;\mathbf{a}+\phi\nabla\mathbf{a}\,, && (3.16)\\
\nabla\times(\phi\mathbf{a}) &= \nabla\phi\times\mathbf{a}+\phi\nabla\times\mathbf{a}\,, && (3.17)\\
\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a}\,,\\
&\quad +\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})\,, && (3.18)\\
\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{b}\,, && (3.19)\\
\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{a}\,, && (3.20)\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) &= \nabla\nabla\cdot\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a}\,, && (3.21)\\
\nabla\times\nabla\phi &= \mathbf{0}\,, && (3.22)\\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) &= 0\,, && (3.23)\\
(\nabla\mathbf{f})_c &= \nabla\mathbf{f}+\mathbf{I}\times(\nabla\times\mathbf{f})\,, && (3.24)\\
(\nabla\mathbf{f})\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{f}+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{f})\,. && (3.25)
\end{aligned}$$

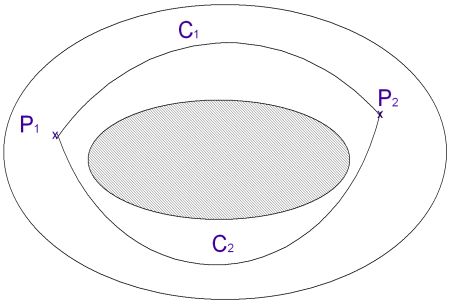
Med utgangspunkt i dei vanlege integral satsane til Gauss og Stokes, kan ein ved enkle manipuleringar med vektor identitetar lett visa dei generaliserte satsane til Gauss og Stokes.
Lat ϕ vere ein skalar vektor eller dyade og lat $*$ stå for vanleg multiplikasjon, skalarmultiplikasjon, vektormultiplikasjon eller eit ubestemt vektorprodukt avhengig av ϕ, då har vi:

$$\begin{aligned}
\oint_S d\boldsymbol{\sigma}*\phi &= \int_V \nabla*\phi\;d\tau\,, && (3.26)\\
\oint_C d\mathbf{r}*\phi &= \int_A (d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)*\phi\,. && (3.27)
\end{aligned}$$

Her er $d\mathbf{r}$ eit lineelement, $d\boldsymbol{\sigma}$ eit flateelement og $d\tau$ eit volumelement, S er ei lukka flate som avgrensar volumet V og C er ei lukka kurve som avgrensar arealet A. Flateelementet $d\boldsymbol{\sigma}$ peikar ut av volumet V i første integralet. Flata A er orientert slik at kurveintegralet rundt A er i positiv lei i likn.(3.27).

3.2.1 Enkelt og dubbelt samanhangande område

Integralsatsane til Gauss og Stokes gjeld ikkje utan vidare i fleirdubbelt samanhangande område.



Figur 3.1: Døme på eit dubbelt samanhangande område

Definisjon 3.4 *Lat P_1 og P_2 vera to vilkårlege punkt i eit område D. Lat C_1 og C_2 vera to vilkårlege kurver som har P_1 og P_2 som endepunkt. Dersom den fritt valde kurva C_2 kan deformerast"over i C_1 ved ein kontinuerleg deformasjon slik at C_2 alltid ligg i D, då har vi eit enkeltsamanhangande område.*

Definisjon 3.5 *Dersom området ikkje er enkeltsamanhangande så er det dubbelt eller fleirdubbelt samanhangande.*

Ein kan ofte ta eit dubbelt eller fleirdubbelt samanhangande område og gjera det enkeltsamanhangande ved å leggja inn snitt". Integralsatsane kan ein så bruka på kvart delområde og ein må då undersøkja om ein får bidrag til integrala frå snitt-flatene". Snittflatene kan ha ulik dimensjon avhengig av dimensjonen på D.

3.3 FUNKSJONELL SAMANHENG

Vi skal sjå på samanheng mellom funksjonar og startar med eit teorem.

Teorem 3.1 *Lat funksjonane $u = u(x, y)$ og $v = v(x, y)$ ha kontinuerlege partielle deriverte for $(x, y) \in D \subset R^2$. Eit nødvendig og tilstrekkeleg krav for at det finst ein samanheng*

$$f(u,v) = 0\,,$$

som er identisk for alle $(x,y) \in D$ *og har kontinuerlege partielle deriverte er at Jacobideterminanten*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}\,,$$

Prov:

- Kravet er nødvendig. Vi har at

$$f(u,v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \nabla u \times (\frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\nabla u \times \nabla v) = \mathbf{0}\,.$$

  - (a) Dersom u er konstant for $(x,y) \in D$, så har vi $\nabla u = \mathbf{0}$ og $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$.
  - (b) Dersom u ikkje er konstant, så må f vera ein funksjon av v og $\frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$, dette medfører då at $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$.

- Kravet er tilstrekkelig. Gå ut frå at $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$ for $(x,y) \in D$. Dette kravet er stetta dersom u eller v er konstante, og då har ein $f(u,v) \equiv u - c = 0$ eller tilsvarende for v. Dersom dette ikkje er tilfelle, så må vi ha at ∇u er parallell med ∇v. I eit gjeve punkt (x_0, y_0) er ∇v normal til nivåkurva for v som går gjennom dette punktet. Den retningsderiverte av u i (x_0, y_0) langs denne nivåkurva er

$$\frac{du}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla u \tag{3.28}$$

  med $\mathbf{t} = k\nabla v \times \mathbf{b}$ der $\mathbf{b}$ er ein normalvektor til kurva som ikkje er parallell med ∇v, og k er skalarfunksjonen $\mid \nabla v \times \mathbf{b} \mid^{-1}$. Men då er $\mathbf{t} \cdot \nabla u = k(\nabla v \times \mathbf{b}) \cdot \nabla u = k\mathbf{b} \cdot (\nabla u \times \nabla v) = 0$ etter føresetnaden; altså

er u konstant langs nivåkurva til v og blir difor ei nivåkurve til u også. Med andre ord fell nivåkurvene til u og v saman; eller, til ein viss v svarar det ein viss u og vi har at det finst ein samanheng (relasjon)

$$f(u,v) = 0\,. \tag{3.29}$$

Q.E.D.

Det fører for langt her å gå inn på provet for at $f(u,v)$ må ha kontinuerlege partielle deriverte.
Dette teoremet let seg lett utvida til tre dimensjonar.

Teorem 3.2 *Lat funksjonane* $u = u(x,y,z)$ *og* $v = v(x,y,z)$ *ha kontinuerlege partielle deriverte for* $(x,y,z) \in D \subset R^3$*. Eit nødvendig og tilstrekkeleg krav for at det skal finnast ein funksjonell samanheng*

$$f(u,v) = 0 \,\forall\, (x,y,z) \in D$$

er at

$$\nabla u \times \nabla v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

Prov: Provet for dette går heilt på same måten som for teorem **3.1** Den einaste skilnaden er at det no vert tale om nivåflater i staden for nivåkurver. Vel ei nivåflate til v og sjå på den retningsderiverte av u langs $\nabla v \times \mathbf{t}$ der $\mathbf{t}$ er ein fritt valt tangentvektor til nivåflata til v i eit punkt (x_0, y_0, z_0).

Teorem 3.3 *Lat* $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ *og* $w = w(x,y,z)$ *vera tre funksjonar som har kontinuerlege partielle deriverte for* $(x,y,z) \in D \subset R^3$*. Eit nødvendig og tilstrekkelig krav for at det skal finnast ein funksjonell samanheng* $f(u,v,w) = 0$ *for alle* $(x,y,z) \in D$ *er at Jacobideterminanten*

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = (\nabla u \times \nabla v) \cdot \nabla w = 0\,.$$

Prov:

- Kravet er nødvendig. Ta gradienten til $f(u,v,w)=0$ og multipliser skalart med vektoren $(\nabla u \times \nabla v)$, ein får då:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(\nabla u \times \nabla v)\cdot \nabla w = 0 \tag{3.30}$$

  - (a) $\frac{\partial f}{\partial w}=0$, dette medfører at vi har $f(u,v)=0$, men då er $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$ etter teorem **3.2** og $(\nabla u \times \nabla v)\cdot \nabla w = 0$.
  - (b) $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0 \Rightarrow \nabla u \times \nabla v \cdot \nabla w = 0$.

- Kravet er tilstrekkelig. Gå ut fra at $(\nabla u \times \nabla v)\cdot \nabla w = 0$.

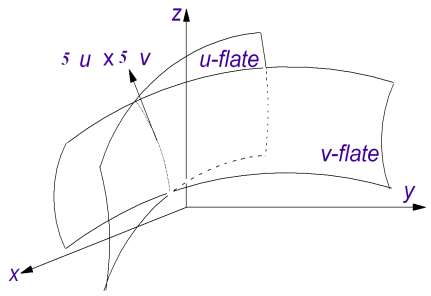
  - (a) $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$. I dette høvet har vi etter teorem **3.2** at det finst ein samanheng

$$f(u,v)=0 \tag{3.31}$$

  - (b) $\nabla u \times \nabla v \neq \mathbf{0}$. Lat $u=a$ og $v=b$ vera nivåflater gjennom punktet (x_0,y_0,z_0). Vi ser på den retningsderiverte av w langs skjæringskurva mellom desse nivåflatene. Vi har

$$\frac{dw}{ds} = k(\nabla u \times \nabla v)\cdot \nabla w\,, \tag{3.32}$$

    der $k = \mid \nabla u \times \nabla v \mid^{-1}$. Men etter føresetnadene har vi at $dw/ds = 0$, eller w er konstant langs denne kurva. Med andre ord for ein viss u og v får vi eit bestemt verde av w, og w er difor ein funksjon av u og v. At denne funksjonen også må ha kontinuerlege partielle deriverte fører det for langt å gå inn på her. (Dette er vist t.d. av K. Knopp og R. Smith, Math. Zeitschrift 25, 1926 side 376-381). Q.E.D.



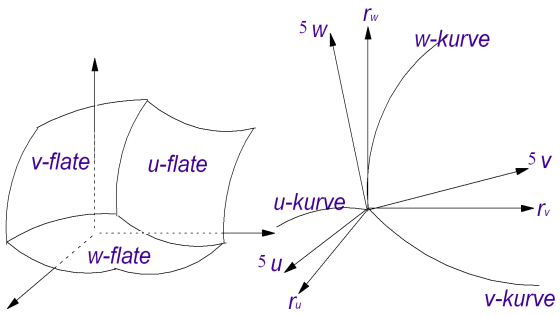
Figur 3.2: Nivåflatene $u = a$ og $v = b$ og skjæringskurva

3.4 KRUMLINE KOORDINATAR

Teorem 3.4 *Lat det vera gjeve tre funkjonar* $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ *og* $w = w(x, y, z)$ *som har kontinuerlege partielle deriverte og der* $(x, y, z) \in D \subset R^3$ *og* $(u, v, w) \in E \subset R^3$. *Desse tre skalarfunksjonane definerer ein vektorfunksjon* $\mathbf{f} = (u, v, w)$. *Gå ut frå at* $\nabla \mathbf{f}$ *er ikkje singulær, altså at Jacobideterminanten* $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$ *for alle* $(x, y, z) \in D$. *For eit gjeve punkt* $(x_0, y_0, z_0) \in D$ *finst det då eit område om punktet* (x_0, y_0, z_0) *der den inverse funksjonen* $\mathbf{r} = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ *er definert og har kontinuerlege partielle deriverte.*

Teorem **3.4** er ein del av det inverse funksjonsteoremet (sjå t.d. Rudin: Principles of mathematical analysis. Provet står der og det blir ikkje teke med her). Når føresetnadene i dette teoremet er oppfylte, så har ein at det omkring eit punkt (x_0, y_0, z_0) finst ein omegn der det er ein ein-eintydig korrespondanse $(x, y, z) \sim (u, v, w)$. I staden for å visa til eit punkt P_0 med koordinatar (x_0, y_0, z_0), så kan vi likegodt bruka dei tre koordinatane (u_0, v_0, w_0), der:

$$u_0 = u(x_0, y_0, z_0) \ , \ v_0 = v(x_0, y_0, z_0) \ , \ w_0 = w(x_0, y_0, z_0) \, . \tag{3.33}$$



Figur 3.3: Koordinatflater og koordinatkurver

Punktet P_0 er plassert i skjæringspunktet mellom dei tre koordinatflatene

$$u(x,y,z) = u_0 \ , \ v(x,y,z) = v_0 \ , \ w(x,y,z) = w_0 \, . \tag{3.34}$$

Skjæringa mellom to og to av desse flatene kallar vi koordinatkurver. Langs koordinat-kurvene vil ein av dei variable u, v, w variera og vi kallar dei u-kurver, v-kurver eller w-kurver alt etter kva koordinat som varierer. Punktet P_0 vil då vera skjæringa mellom desse tre koordinatkurvene. Desse kurvene vil ålment vera krumme-kurver og dette er grunnen til namnet på desse koordinatane. Til samanlikning så har vi at dei kartesiske koordinatane avbilda på seg sjølv, $(x,y,z) \sim (x,y,z)$, gjev som koordinatflater plan, og som koordiantkurver rette liner parallelle med koordinataksane.

3.5 DIFFERENSIERING

Lat f vera ein skalar eller vektorfunksjon av u, v, w som er funksjonar av x, y, z der $[\nabla u \nabla v \nabla w] \neq 0$. Den retningsderiverte av f er då gjeven ved

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{ds} \\ &= \mathbf{e} \cdot \{\nabla u f_u + \nabla v f_v + \nabla w f_w\} \, , \end{aligned}$$

der $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ o.s.b. og $\mathbf{e}$ er ein einingsvektor i den retningen vi deriverer. Etter definisjonen av gradient operator (sjå Apostol T.8.5 og 8.9) har vi no

$$\nabla = \nabla u \frac{\partial}{\partial u} + \nabla v \frac{\partial}{\partial v} + \nabla w \frac{\partial}{\partial w} \,. \tag{3.35}$$

Dette er utgangspunktet for å finna divergens og kvervling (curl) i krumlinekoordinatar. For eit vilkårleg vektorfelt $\mathbf{f}$ har vi

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{f} &= \nabla u \, \mathbf{f}_u + \nabla v \, \mathbf{f}_v + \nabla w \, \mathbf{f}_w \,, & (3.36) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= \nabla u \cdot \mathbf{f}_u + \nabla u \cdot \mathbf{f}_v + \nabla w \cdot \mathbf{f}_w \,, & (3.37) \\ \nabla \times \mathbf{f} &= \nabla u \times \mathbf{f}_u + \nabla v \times \mathbf{f}_v + \nabla w \times \mathbf{f}_w \,. & (3.38) \end{aligned}$$

Vi går no attende og ser på posisjonsvektoren som etter det vi har sagt, kan skrivast som

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \mathbf{r}(u(x, y, z) \,,\; v(x, y, z) \,,\; w(x, y, z)) \,. \tag{3.39}$$

No er

$$\nabla \mathbf{r} = \mathrm{I} = \nabla u \, \mathbf{r}_u + \nabla v \, \mathbf{r}_v + \nabla w \, \mathbf{r}_w \,. \tag{3.40}$$

der $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ og $\mathbf{r}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$.

Dette resultatet syner at vektorsetta

$$\nabla u, \nabla v, \nabla w \text{ og } \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w \,, \tag{3.41}$$

er resiproke sett. Difor er dei også kvar for seg ein basis for R^3.
Merk at desse basisane vil vera avhengig av koordinatane (posisjonen). Merk også at for Jacobideterminanten

$$J = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_w \equiv [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w] \,, \tag{3.42}$$

så gjeld det at

$$J^{-1} = [\nabla u \nabla v \nabla w] \,, \tag{3.43}$$

eller

$$[\nabla u \nabla v \nabla w][\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w] = 1 \,. \tag{3.44}$$

Frå eigenskapane til resiproke sett har vi

$$\nabla u = \frac{1}{J}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)\,, \quad \nabla v = \frac{1}{J}(\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u)\,, \quad \nabla w = \frac{1}{J}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,, \tag{3.45}$$

$$\mathbf{r}_u = J(\nabla v \times \nabla w)\,, \quad \mathbf{r}_v = J(\nabla w \times \nabla u)\,, \quad \mathbf{r}_w = J(\nabla u \times \nabla v)\,. \tag{3.46}$$

I likn.(3.36) skal vi i staden for basisen $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ bruka $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$, i samsvar med formlane (3.45), vi finn

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{1}{J}\{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w\, \mathbf{f}_u + \mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u\, \mathbf{f}_v + \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, \mathbf{f}_w\}\,, \tag{3.47}$$

eller

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{1}{J}\{(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w\, \mathbf{f})_u + (\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u\, \mathbf{f})_v + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, \mathbf{f})_w\}\,, \tag{3.48}$$

der vi har brukt identiteten

$$(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)_u + (\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u)_v + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_w \equiv \mathbf{0}\,. \tag{3.49}$$

To andre uttrykk for divergens og kvervling får ein no ved å erstatta det ubestemte vektor produktet med skalar multiplikasjon og vektor multiplikasjon. Dersom ein utviklar trippelvektorproduktet i uttrykket for kvervlinga, finn ein at dette kan skrivast på følgjande kompakte form

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{f} & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{f} & \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix}\,. \tag{3.50}$$

Når $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$ er erstatta med $\mathbf{r}_x = \mathbf{i}\,,\ \mathbf{r}_y = \mathbf{j}$ og $\mathbf{r}_z = \mathbf{k}$, så finn ein att det velkjende uttrykket som gjeld for rettvinkla kartesiske koordinatar.

3.5.1 Rettvinkla koordinatar

Ein spesielt viktig klasse av krumlinekoordinatar er dei såkalla rettvinkla koordinatane. Dei stettar kravet

$$\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_w = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_w = 0\,. \tag{3.51}$$

Vi innfører einingsvektorane $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ og skriv

$$\mathbf{r}_u = U\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{r}_v = V\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{r}_w = W\mathbf{c}\,, \tag{3.52}$$

$$J = [\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{r}_w] \ = \ UVW\,. \tag{3.53}$$

Det resiproke settet er

$$\nabla u = \frac{\mathbf{a}}{U}\ ,\ \nabla v = \frac{\mathbf{b}}{V} \text{ og } \nabla w = \frac{\mathbf{c}}{W}\,. \tag{3.54}$$

Set vi dette inn i dei uttrykka vi har funne for gradient, divergens og kvervling, så får vi

$$\nabla\mathbf{f} \ = \ \frac{1}{U}\mathbf{a}\mathbf{f}_u + \frac{1}{V}\mathbf{b}\mathbf{f}_v + \frac{1}{W}\mathbf{c}\mathbf{f}_w\,, \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{f} \ &= \ \frac{1}{UVW}\{\frac{\partial}{\partial u}(VW\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial v}(WU\mathbf{b}\cdot\mathbf{f}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w}(UV\mathbf{c}\cdot\mathbf{f})\}\,,\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\nabla\times\mathbf{f} \ = \ \frac{1}{UVW}\begin{vmatrix} U\mathbf{a} & V\mathbf{b} & W\mathbf{c} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ U\mathbf{a}\cdot\mathbf{f} & V\mathbf{b}\cdot\mathbf{f} & W\mathbf{c}\cdot\mathbf{f} \end{vmatrix}\,. \tag{3.57}$$

Dersom vi set $\mathbf{f} = \nabla g$ i uttrykket for divergensen, så får vi

$$\nabla^2 g = \frac{1}{UVW}\{\frac{\partial}{\partial u}(\frac{VW}{U}g_u) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{WU}{V}g_v) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{UV}{W}g_w)\}\,. \tag{3.58}$$

Der $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ er Laplace operatoren. Når koordinatane er gjevne ved likningane

$$X = X(u,v,w)\ ,\ Y = Y(u,v,w)\ ,\ Z = Z(u,v,w)\,, \tag{3.59}$$

så har vi at

$$U = \mid \mathbf{r}_u \mid = \mid X_u\mathbf{i} + Y_u\mathbf{j} + Z_u\mathbf{k} \mid = \sqrt{X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2}\,, \tag{3.60}$$

og tilsvarande for V og W. Dei skalare storleikane U, V og W vert ofte kalla for skala- faktorane. Dette studiet av koordinattransformasjonar kan formaliserast og vidare utviklast. Ein kjem då over i tensoranalysen, som vi skal koma attende til seinare.

3.5.2 Flateskarar og kurveskarar

Koordinatflatene som vi har nemnt utgjer det vi kallar flateskarar eller flate familiar. I R^3 er det tale om tre flateskarar. Kvar av desse flateskarane er ein ein-parameter familie av flater (t.d. er u_0 parameteren for u-flatene), for kvar u_0 får vi ei flate. Vi kan også tenkja oss at vi vel u_0 slik at flata går gjennom punktet (x_0, y_0, z_0). Lokalt går berre ei slik flate gjennom kvart punkt, p.g.a. at funksjonane våre stettar kravet i det inverse funksjonsteoremet.
Koordinatkurvene vi har sett på svarar til det vi kallar kurveskarar eller kurvefamiliar. Kvar av dei tre kurveskarane er ein to-parameter familie av kurver. T.d. så er w-kurva (skjæringskurva mellom flatene $u = u_0$ og $v = v_0$) avhengig av dei to parametrane u_0 og v_0. Vi kan difor velja eit punkt t.d. i planet $z = 0$, xy-planet (x_0, y_0) og bestemma u_0 og v_0 slik at den w-kurva vi ser på, går gjennom dette punktet. Etter føresetnadene vi gjorde, går det berre ei w-kurve gjennom dette punktet. Og lokalt, så gjeld det at gjennom kvart punkt i ein viss omegn om (x_0, y_0), så går det ei og berre ei slik kurve. Ein slik kurveskare kaller ein for eit system av feltliner. Feltliner skal vi koma attende til i avsnitt 3.7.

3.6 DIFFERENSIERING PÅ FLATER

3.6.1 Flaterepresentasjonar

Lat ei flate vera gjeven ved ein parametrisk representasjon

$$x = x(u, v)\ ,\ y = y(u, v)\ ,\ z = z(u, v)\,. \tag{3.61}$$

Vi går ut frå at dei tre funksjonane har kontinuerlege partielle deriverte til første orden. Vi skal sjå på flater som har ein viss regularitet og ser bort frå dei to tilfella når vi får degenerasjon, d.v.s.

- Eit punkt; (x, y, z er konstante).
- Ei kurve; (u og v kan uttrykkjast ved hjelp av ein variabel $u = u(t),\ v = v(t)$.

Dette let seg formalisera ved å sjå på Jacobi matrisa

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} . \tag{3.62}$$

I første tilfellet er alle element i denne matrisa null. I andre tilfellet er rangen av matrisa 1. Vi ser bort frå desse tilfella og går ut frå at rangen av Jacobi matrisa er 2.
Posisjonsvektoren frå eit gjeve origo fram til eit vilkårleg punkt på flata med koordinatar (u, v) skal vi kalla for

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} . \tag{3.63}$$

Vi har

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} . \tag{3.64}$$

Vilkåret for at $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ er at minst ein av underdeterminantene i Jacobimatrisa har rang 2. Altså er dette ekvivalent med kravet om at vi har ei flate som ikkje er degenerert. Dersom $u = u(t)$ og $v = v(t)$ eller $t = t_1(u),\ t = t_2(v)$, så har vi $\mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\partial t}{\partial u},\ \mathbf{r}_v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{\partial t}{\partial v}$ altså $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 0$.

3.6.2 Ny parameter-representasjon

Lat dei nye parametrane $\bar{u}$ og $\bar{v}$ vera gjevne ved

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}) \ , \ v = v(\bar{u}, \bar{v}) . \tag{3.65}$$

Vi krev at Jacobideterminanten for denne transformasjonen skal vera ulik null:

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{3.66}$$

Vi har no at

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\bar{u}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} , \\ \mathbf{r}_{\bar{v}} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} &= (\mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}) \times (\mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}) \\ &= \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v (\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot J \,.\end{aligned}$$

Konklusjon: $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ og $J \neq 0 \Longrightarrow r_{\bar{u}} \times \mathbf{r}_{\bar{v}} \neq \mathbf{0}$.

3.6.3 Den første fundamentalforma

Vi kan definera ei vilkårleg kurve som ligg i flata ved å velja

$$u = u(t),\ v = v(t)\,. \tag{3.67}$$

Ein tangentvektor til denne kurva er gjeven ved

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}\,, \\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \dot{v}^2\,.\end{aligned}$$

Bogelengda for kurva er vidare gjeven som

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt\,, \tag{3.68}$$

eller $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}$, difor har vi

$$|\,\frac{ds}{dt}\,|^2 = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \dot{v}^2\,. \tag{3.69}$$

Om vi innfører differensiala

$$ds = \dot{}\ sdt\,, \quad d\cancel{t} \dot{}\ udt \text{og} \quad dv = \dot{}\ vdt\,, \tag{3.70}$$

så kan vi skriva dette som

$$ds^2 = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v dv^2\,. \tag{3.71}$$

Denne første fundamentale kvadratiske forma vert vanlegvis skriven som

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2\,, \tag{3.72}$$

med

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \ \text{ og } \ G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \,. \tag{3.73}$$

Vidare har vi

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix} = EG - F^2 \,, \tag{3.74}$$

eller

$$\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid^2 = EG - F^2 > 0 \,, \tag{3.75}$$

slik at $EG - F^2$ er positiv definit i alle regulære punkt på flata. For parameter kurvene: $v =$ konst. og $u =$ konst. (altså $dv = 0$ og $du = 0$) har vi tilsvarande at

$$ds_1 = \sqrt{E}du, \ ds_2 = \sqrt{G}dv \,. \tag{3.76}$$

Sidan $\mathbf{r}_u$ og $\mathbf{r}_v$ er tangentar svarande til u-kurvene og v-kurvene, så vil desse parameterkurvene skjære kvarandre i rett vinkel dersom og berre dersom $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = F = 0$.

3.6.4 Flate-elementet

Vektoren $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ står normalt på flata og parallellogrammet som vert laga av vektorane $\mathbf{r}_u du$ og $\mathbf{r}_v dv$ har eit vektorareal

$$d\mathbf{s} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dudv \,. \tag{3.77}$$

Det skalare flatearealet svarande til $d\mathbf{s}$ er

$$ds = \mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv \,. \tag{3.78}$$

Vi skal velja einingsnormalvektoren $\mathbf{n}$ til flata, slik at

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{H} \,, \tag{3.79}$$

der

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{EG - F^2} > 0 \,. \tag{3.80}$$

I kvart flatepunkt vil vektorsettet $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$ svara til eit høgresystem fordi

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{n} = H > 0. \tag{3.81}$$

3.6.5 Differensialoperasjonar på ei flate

Lat funksjonen $\mathbf{f}(u,v)$ vera ein funksjon som har ein derivert, den kan vera ein skalar, vektor eller ein dyade som er definert i kvart punkt $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ på flata. Vi skal rekna ut den deriverte med omsyn på bogelengda langs ei kurve i flata gjeven ved $u=u(t)$ og $v=v(t)$. Langs denne kurva har vi når s er bogelengda langs kurva

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds}=\mathbf{f}_u\frac{du}{ds}+\mathbf{f}_v\frac{dv}{ds}\,. \tag{3.82}$$

No er

$$\frac{du}{ds}=\frac{du}{dt}/\frac{ds}{dt}\quad\text{og}\quad\frac{dv}{ds}=\frac{dv}{dt}/\frac{ds}{dt}\,,$$

med

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{u}^2}\,,$$

frå likn.(3.69). Set vi inn posisjonsvektoren $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ i likn.(3.82), finn vi

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{e}=\mathbf{r}_u\frac{du}{ds}+\mathbf{r}_v\frac{dv}{ds}\,, \tag{3.83}$$

der $\mathbf{e}$ er ein einingstangentvektor til kurva. Lat no $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vera det resiproke settet til $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v,\mathbf{n}$, ($\mathbf{n}$ er einingsnormalvektoren til flata likn.(3.79)). Då har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\mathbf{r}_v\times\mathbf{n}}{H}\,,\quad \mathbf{b}=\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{r}_u}{H}\,,\quad \mathbf{c}=\mathbf{n}\,,\\ H &= [\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{n}]=\sqrt{EG-F^2}\,,\\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{H}\,.\end{aligned}$$

Sidan $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}=\frac{du}{ds}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}=\frac{dv}{ds}$ (frå likn.(3.83)), så har vi

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds}=\mathbf{e}\cdot(\mathbf{a}\mathbf{f}_u+\mathbf{b}\mathbf{f}_v)\,. \tag{3.84}$$

Vi definerer no flategradienten, ∇_s, som

$$\nabla_s\mathbf{f}=\mathbf{a}\mathbf{f}_u+\mathbf{b}\mathbf{f}_v\,. \tag{3.85}$$

Flategradienten har då desse eigenskapane

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \cdot \nabla_s \mathbf{f} &= \mathbf{f}_u \,, \\
\mathbf{r}_v \cdot \nabla_s \mathbf{f} &= \mathbf{f}_v \,, \\
\mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{f} &= \mathbf{0} \,, \\
\mathbf{e} \cdot \nabla_s \mathbf{f} &= \frac{d\mathbf{f}}{ds} \,.
\end{aligned}$$

Flategradienten representerer syntesen av alle dei retningsderiverte av $\mathbf{f}$ i flata. Vi har at

$$\nabla_s \mathbf{f} = \mathbf{e}^1 \frac{d\mathbf{f}}{ds_1} + \mathbf{e}^2 \frac{d\mathbf{f}}{ds_2} \,, \tag{3.86}$$

der s_1 og s_2 er bogelengde-koordinatane i retningane $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, difor har vi at flategradienten er gjeven ved kjennskapen til dei retningsderiverte i to retningar i tangentplanet til eit vilkårleg punkt i flata.
Av likn.(3.86) ser vi at flategradienten er uavhengig av val av koordinatar u og v.

Flatedivergens og flatekvervling

Lat $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ vera ein tensor punktfunksjon (det vil seia ein tensor som er definert i kvart punkt på flata), som varierer over flata $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, då har vi likn.(3.85)

$$\nabla_s \mathbf{f} = \mathbf{a}\mathbf{f}_u + \mathbf{b}\mathbf{f}_v \,, \tag{3.87}$$

og denne dyaden har invariantane

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_u + \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_v \,, \tag{3.88}$$

$$\nabla_s \times \mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{f}_u + \mathbf{b} \times \mathbf{f}_v \,, \tag{3.89}$$

der $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ er det resiproke settet til $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$. For posisjonsvektoren $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ som særtilfelle, har vi

$$\nabla_s \mathbf{r} = \mathbf{a}\mathbf{r}_u + \mathbf{b}\mathbf{r}_v = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n} \,, \tag{3.90}$$

$$\nabla_s \cdot \mathbf{r} = 3 - 1 = 2 \,, \tag{3.91}$$

$$\nabla_s \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ vidare er } \nabla_s \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \,. \tag{3.92}$$

Prov for den siste relasjonen:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{n}_u + \mathbf{b} \times \mathbf{n}_v = \frac{(\mathbf{r}_v \times \mathbf{n})}{H} \times \mathbf{n}_u + \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{r_u})}{H} \times \mathbf{n}_v$$
$$= -\frac{1}{H}[\mathbf{r}_v \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_u - \mathbf{n}\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u + \mathbf{n}\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v - \mathbf{r}_u \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_v] .$$

Ved å derivera $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ finn vi

$$\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{n} = 0 . \tag{3.93}$$

Sidan $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0$ har vi

$$\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v = 0 \text{ og } \mathbf{r}_{vu} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u = 0 , \tag{3.94}$$

og difor $\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u - \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v = 0$. Av dette følgjer det at $\mathbf{a} \times \mathbf{n}_u + \mathbf{b} \times \mathbf{n}_v = 0$, altså

$$\nabla_s \times \mathbf{n} = 0 . \tag{3.95}$$

3.6.6 Oppsummering

Ein kan lett visa følgjande vektor-identitetar for flater:

$$\nabla_s(\lambda \mathbf{f}) = (\nabla_s \lambda)\mathbf{f} + \lambda \, \nabla_s \mathbf{f} , \tag{3.96}$$
$$\nabla_s \cdot (\lambda \mathbf{f}) = (\nabla_s \lambda) \cdot \mathbf{f} + \lambda \, \nabla_s \cdot \mathbf{f} , \tag{3.97}$$
$$\nabla_s \times (\lambda \mathbf{f}) = (\nabla_s \lambda) \times \mathbf{f} + \lambda \, \nabla_s \times \mathbf{f} , \tag{3.98}$$
$$\nabla_s \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla_s \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \nabla_s \times \mathbf{v} . \tag{3.99}$$

Vi har denne samanhengen mellom flate- og romlege invariantar.

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{e}^1 \frac{d\mathbf{f}}{ds_1} + \mathbf{e}^2 \frac{d\mathbf{f}}{ds_2} + \mathbf{n}\frac{d\mathbf{f}}{dn} = \nabla_s \mathbf{f} + \mathbf{n}\frac{d\mathbf{f}}{dn} , \tag{3.100}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla_s \cdot \mathbf{f} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dn} , \tag{3.101}$$
$$\nabla \times \mathbf{f} = \nabla_s \times \mathbf{f} + \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{f}}{dn} . \tag{3.102}$$

Særskilt har vi

$$\mathbf{n} \times \nabla \mathbf{f} = \mathbf{n} \times \nabla_s \mathbf{f} , \tag{3.103}$$
$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_s \times \mathbf{f} . \tag{3.104}$$

3.7 Vektorfelt og feltliner

3.7.1 Definisjon og innleiing

Vektorfelt har vi studert i emnet M 112. Vi skal her utdjupa dette omgrepet noko, og sjå på det vi kallar system av feltliner knytt til eit vektorfelt, t.d. feltlinene for eit magnetfelt materialisert ved jernfilspon. For ei væske som har eit konstant hastighetsfelt $\mathbf{v}$, svarar feltlinene til banane, (trajektoriane) for væskepartiklane. Dersom vektorfeltet er eit kraftfelt kallar ein ofte feltlinene for kraftliner. For eit potensialfelt $\mathbf{v} = \nabla\phi$, vil feltlinene stå ortogonalt på nivåflatene. Feltlinene er eit middel som kan brukast når ein vil kartleggja eit vektorfelt.

Definisjon 3.6 *Lat det vera gjeve eit vektorfelt* $\mathbf{V}$, $|\,\mathbf{V}\,| \neq 0$, *i eit område* D, *og ein toparameterfamilie av kurver* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_1, c_2)$ *også i* D. *Dersom vi ved passande val av* c_1 *og* c_2 *har at*

$$\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}\,,$$

over alt i D, *så seier vi at kurveskaren (toparameterfamilien)* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_1, c_2)$ *er feltlinene til* $\mathbf{V}$.

Merknad: Frå definisjon **3.6** har ein: Dei kurvene vi kallar feltliner har den eigenskapen, at dei i eitkvart punkt på kurva har ein tangentvektor, som fell samam med vektor feltet i retning.
Det er eit sentralt problem å bestemma feltlinene til eit gjeve vektorfelt og det skal vi no sjå på. Det vil altså seia at for ein gjeven $\mathbf{V}$, får vi å løysa vektorlikninga

$$\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}\,. \tag{3.105}$$

Skriven på komponentform med

$$\mathbf{V} = \{v_1, v_2, v_3\}\,,$$

har vi

$$
\begin{aligned}
v_1 \frac{dy}{dt} &= v_2 \frac{dx}{dt}\,, \\
v_2 \frac{dz}{dt} &= v_3 \frac{dy}{dt}\,, \\
v_3 \frac{dx}{dt} &= v_1 \frac{dz}{dt}\,.
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

Ein ser lett at berre to av desse likningane er uavhengige, den tredje kan utleiast av dei to andre. Merk også at om vi multipliserer $\mathbf{V}$ med ein skalar, så vert likningane uendra. To vektorfelt kan ha same feltliner om dei er av ulik "styrke" $\mid \mathbf{V}_1 \mid \neq \mid \mathbf{V}_2 \mid$, men $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = 0$.
Dersom $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_x \neq 0$ ($\mathbf{e}_x$ er ein einingsvektor langs x-aksen) i det aktuelle området, så kan vi velja parameteren $t = x$ (eller tilsvarande for y og z). Frå den første og siste av likn.(3.106) får vi med $t = x$.

$$
\begin{aligned}
v_1 \frac{dy}{dx} &= v_2\,, \\
v_3 &= v_1 \frac{dz}{dx}\,.
\end{aligned}
$$

Formelt kan vi skriva dette som

$$
\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2} = \frac{dz}{v_3}\,. \tag{3.107}
$$

Denne skrivemåten er ein god hugseregel for desse likningane. Elles merkar vi også at desse likningane er eit sett av simultane vanlege differensial-likningar

$$
\frac{dy}{dx} = g_1(x, y, z)\,, \tag{3.108}
$$

$$
\frac{dz}{dx} = g_2(x, y, z)\,, \tag{3.109}
$$

der $g_1 \equiv \frac{v_2}{v_1}$ og $g_2 \equiv \frac{v_3}{v_1}$. Frå teorien for slike likningar, veit vi at startverdeproblemet har eintydig løysing under visse ålmenne føresetnadar

som Lipschitz-krav og kontinuerleg partielle deriverte av g_1 og g_2. I praksis kan det likevel by på store problem å løysa eit slikt system av likningar med analytiske metodar. Numerisk derimot står ein sterkt når det gjeld å finna spesielle løysingar av slike problem. Vi skal her likevel avgrensa oss til visse typar problem som kan løysast analytisk, og sjå på nokre metodar i denne samanhengen.

3.7.2 Løysings metodar

Metode I

Den eine likninga er ukopla frå den andre.
Gå ut frå at

$$\frac{dy}{dx} = g_1(x, y)\,,$$

$$\frac{dz}{dx} = g_2(x, y, z)\,.$$

Vi går ut frå at vi kan løysa den første av desse likningane med vanlege metodar, slik at vi finn $y = y(x, c_1)$, denne løysinga substituerer vi så inn i den andre likninga, som dermed blir ei tilsvarande likning for z med løysing $z = z(x, c_1, c_2)$. Vi kan også skriva desse løysingane som

$$u(x, y, z) = c_1\,,$$

$$v(x, y, z) = c_2\,.$$

Skriven på denne måten, så representerer kvar av løysingane for gjevne verde av c_1 og c_2 ei flate. Vi har altså to ein-parameterfamiliar av flater. Skaren av skjæringskurvene mellom desse flatene er ein toparameter familie av kurver, som då er feltlinene til vektorfeltet $\mathbf{V}$. Om likningane slik dei er gjevne ikkje fell inn under denne klassen, så kan dei i visse høve omformast til denne typen ved å føra inn nye variable r og s istaden for y og z. Vi skal illustrera metoden ved eit døme.

$$\mathbf{V} = \{1, z, x + y\}\,, \tag{3.110}$$

$$\frac{dy}{dx} = z\,, \tag{3.111}$$

$$\frac{dz}{dx} = x + y\,. \tag{3.112}$$

Vi prøver med dei nye variable r og s , $y = r + as$, $z = r + bs$ der a og b er til disposisjon.
Vi substituerer i likningane (3.111) og (3.112), multipliserer den første med c den andre med 1 og adderer

$$r' + as' = r + bs \qquad \mid\ c \tag{3.113}$$

$$r' + bs' = r + as + x \ \mid\ 1\,. \tag{3.114}$$

Dette gjev

$$(1 + c)r' + (ac + b)s' = (1 + c)r + (bc + a)s + x\,. \tag{3.115}$$

Set koeffisientane for s' og s lik null: $ac + b = 0$, $bc + a = 0 \ \Rightarrow\ c^2 = 1$, men c kan berre ha verdet 1 elles vil også koeffisientane til r' og r bli null. Altså $c = 1$ og $a + b = 0$ t.d. $a = 1,\ b = -1$. Vi har då

$$r' - r = \frac{1}{2}x\ ,\quad r = c_1 e^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ . \tag{3.116}$$

Frå likn. (3.113) eller (3.114) kombinert med (3.116) finn vi

$$s' + s = -\frac{x}{2} \qquad s = c_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,. \tag{3.117}$$

Vi finn vidare

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x\,, \\ z &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} - 1\,. \end{aligned}$$

Dette systemet av likningar kan vi løysa med omsyn på c_1 og c_2, vi får då

$$u(x, y, z) \equiv \frac{1}{2}e^{-x}(x + y + z + 1) = c_1\ ,$$

$$v(x, y, z) \equiv \frac{1}{2}e^{x}(x + y - z - 1) = c_2\ .$$

Sidan $\nabla u \times \nabla v \not\equiv \mathbf{0}$ blir ein tangenvektor til skjæringskurva mellom u-flateskaren og v-flateskaren, så kan vi setja prøve på resultatet ved å finna denne vektoren og sjå om han er paralell med $\mathbf{V}$.
Vi finn

$$\begin{aligned} \nabla u \times \nabla v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \dot{\mathbf{J}} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{2}e^{-x}(x+y+z) & \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{-x} \\ \frac{1}{2}e^{x}(x+y-z) & \frac{1}{2}e^{x} & -\frac{1}{2}e^{x} \end{vmatrix} \\ &= \left\{-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}z\mathbf{j} - \frac{1}{2}(x+y)\mathbf{k}\right\}. \end{aligned}$$

Vi har $V_1 = 1$, $V_2 = z$, og $V_3 = x + y$, så vi ser at $\nabla u \times \nabla v = -\frac{1}{2}\mathbf{V}$.
Vi kunne også løyst dette problemet ved å setja koeffisientane for r' og r lik null, altså $c = -1$. Gjennomfør dette som øving.

Merk at i dette dømet fann vi feltlinene som skjæringskurver mellom to ein-parameter familiar av flater. Ein kunne gå meir beinveges mot dette målet, med andre ord, vi kunne stilt problemet: Finn to flateskarar som kvar for seg er slik at feltlinene over alt ligg i desse flatene.

Metode II

Bestem to lineært uavhengige vektorfelt $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$ slik at

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{3.118}$$

Merk at $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$ kan kvar for seg multipliserast med ein vilkårleg skalarfunksjon. Bruk denne fridomen til å bestemma to skalarfunksjonar u og v slik at

$$\mathbf{F}_1 = \nabla u \quad \text{og} \quad \mathbf{F}_2 = \nabla v\,. \tag{3.119}$$

Dei to ein-parameterfamiliane av flater

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= c_1\,, \\ v(x,y,z) &= c_2\,. \end{aligned}$$

har ein to-parameter familie av skjæringskurver og desse skjæringskurvene er feltlinene til $\mathbf{V}$.

Lat oss visa dette:
Vektoren $\nabla u \times \nabla v$ er tangentvektor til desse skjæringskurvene.
Men vi har også at

$$(\nabla u \times \nabla v) \times \mathbf{V} = \nabla v \mathbf{V} \cdot \nabla u - \nabla u \mathbf{V} \cdot \nabla v = \mathbf{0} \,. \tag{3.120}$$

Lat oss illustrera denne metoden også.
Finn feltlinene til vektorfeltet

$$\mathbf{V} = \{y(x+y) - az \ , \ x(x+y) + az \ , \ z(x+y)\} \,, \tag{3.121}$$

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V} = f_1 V_1 + f_2 V_2 + f_3 V_3 = 0 \,.$$

Vi vel

$$f_1 = z \ , \ f_2 = z \text{ og } f_3 = -(x+y) \,.$$

Lat ϕ vera ein vilkårleg skalarfunksjon og skriv

$$\phi \mathbf{F}_1 = \nabla u \,,$$

altså

$$\phi z = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad \phi z = \frac{\partial u}{\partial y} \ , \quad -\phi(x+y) = \frac{\partial u}{\partial z} \,.$$

Vi ser at $u = \frac{1}{z}(x+y)$ og $\phi = z^{-2}$ er ei løysing.
Når vi så vel $\mathbf{F}_2 = \{x, -y, a\}$:

$$\phi x = \frac{\partial v}{\partial x} \ , \quad -\phi y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ og } \phi a = \frac{\partial v}{\partial z} \,,$$

så ser vi at

$$\phi = 2 \ , \ v = x^2 - y^2 + 2az \,,$$

er ei løysing.

Feltlinene til $\mathbf{V}$ er då gjevne som to- parameter familien av skjæringskurver mellom flateskarane

$$u \equiv \frac{x+y}{z} = c_1 \,,$$

$$v \equiv x^2 - y^2 + 2az = c_2 \,.$$

Prøve på resultatet viser at $(\nabla u \times \nabla v) \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$.

Oppgåver:

1. Lat $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ vera einingsvektoren i radiell retning frå eit gjeve origo. Vis at

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{2}{r} \text{ og } \nabla \times \mathbf{R} = 0. \tag{3.122}$$

2. Lat $f = f(r)$ vera ein skalarfunksjon av berre $r = \mid \mathbf{r} \mid$. Vis då at $\nabla^2 f(r) = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r$ og at $\nabla^2 f(r) = 0 \;\Rightarrow\; f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$.

3. (a) Vis at feltlinene til vektorfeltet $\mathbf{V} = \{xz, yz, xy\}$ er gjeve ved kurveskaren $y/x = c_1$ og $xy - z^2 = c_2$.

   (b) For vektorfeltet $\mathbf{V} = \{x, 2x^2, y+z\}$ har vi tilsvarande $y - x^2 = c_2$ og $\frac{z+y}{x} - 2x = c_2$.

   (c) Vis at vektorfeltet $\mathbf{V} = \{x(y-z)\ ,\ y(z-x)\ ,\ z(x-y)\}$ er divergensfritt. For slike vektorfelt kan ein skriva $\mathbf{V} = \nabla u \times \nabla v$, kurveskaren $u = c_1$ og $v = c_2$ er feltlinene til $\mathbf{V}$. Finn u og v. (Svar: $u = x + y + z = c_1$, $v = xyz = c_2$)

   (d) Vis at funksjonane svarande til $u = u(x, y, z)$ og $v = v(x, y, z)$ i alle desse oppgåvene er funksjonelt uavhengige.

4. Eit vektorfelt $\mathbf{v}$ er solenoidalt når $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Vis at eit vektorfelt

$$\mathbf{v} = \nabla u \times \nabla v \,,$$

   er solenoidalt, der u og v har kontinuerlege deriverte. Ein kan også omvendt visa at eit solenoidalt felt alltid kan skrivast slik. Prøv å gjera det.

5. Bruk resultatet ovafor til å vise at eit vilkårleg vektorfelt $\mathbf{f}$ kan skrivast som

$$\mathbf{f} = \nabla w + u\nabla v$$

(Problemet med å bestemma u og v kallast Paffs problem.)

6. Finn feltlinene til vektorfeltet

$$\mathbf{f} = x\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}\,.$$

7. Vektorfeltet

$$\mathbf{f} = x(y-z)\mathbf{i} + y(z-x)\mathbf{j} + z(x-y)\ \mathbf{k}\,,$$

er solenoidalt, altså: $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Prøv å finna u og v slik at

$$\mathbf{f} = \nabla u \times \nabla v.$$

8. Vis følgjande av Green's identitetar

$$\begin{aligned}
\int \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dv + \int \varphi\nabla^2\psi dv &= \oint \varphi \frac{d\psi}{dn} ds\,, \\
\int \left(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right) dv &= \oint \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) ds\,.
\end{aligned}$$

9. Vis at

$$\int_S \{\nabla_s \mathbf{f} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\mathbf{f}\} d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{m}\mathbf{f} d\mathbf{r}\,,$$

der $\mathbf{m} = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$ og $\mathbf{T}$ er tangentvektor til kurva C, som ein integrerer langs, og $\mathbf{n}$ er einingsnormalen til flata S (som er avgrensa av kurva C).

10. Når $\mathbf{r}$ er posisjonsvektoren, vis at

$$\int_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

over ein vilkårleg lukka flate S .

11. Ein lekam avgrensa av ei flate S er utsett for eit konstant trykk $-\mathbf{n}p$ ($\mathbf{n}$ er einingsflatenormalvektoren). Vis at kreftene som verkar på denne lekamen har null moment med omsyn på eit vilkårleg moment punkt.

12. Dersom ei lukka kurve avgrensar ei flate S , vis då at

$$\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{r} d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{T} r^2 ds \,,$$

der $\mathbf{T}$ er einingstangentvektoren til kurva, $\mathbf{n}$ er einigsflatenormalvektoren til S og $\mathbf{r}$ er posisjonsvektoren med $r = |\mathbf{r}|$.

13. Dersom $\mathbf{c}$ er ein konstant vektor og V er eit volum avgrensa av flata S, vis då at

$$\int_S \mathbf{n} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) d\boldsymbol{\sigma} = 2V\mathbf{c} \,.$$

14. (a) Følgjande vektorsett er gjeve, der t er ein parameter

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{t, \quad 1, \quad 1\} \\ \mathbf{e}_2 &= \{1, \quad -\tfrac{1}{2}t, \quad 1\} \\ \mathbf{e}_3 &= \{1, \quad 1, \quad -\tfrac{1}{2}t\} \end{aligned}$$

i. Kva er vilkåret for at dette settet har eit resiprokt vektorsett?

ii. Finn det resiproke vektorsettet.

(b) Følgjande koordinattransformasjon $(x, y, z) \to (u, v, w)$ er gjeven

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}u^2 + v + w \\ y &= -\tfrac{1}{4}v^2 + u + w \\ z &= -\tfrac{1}{4}w^2 + u + v \end{aligned}$$

i. Finn tangentvektorar $\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v$ og $\mathbf{t}_w$ til koordinatlinene (u-lina, v-lina og w-lina) i punktet $u = v = w = t$.

ii. Finn normalvektorar til koordinatflatene (u-flata, v- flata, w-flata) i same punktet.
NB! Det er ikkje turvande å normalisera desse tangentvektorane og normalvektorane.

15. Undersøk om desse funksjonane er funksjonellt avhengige.

(a)

$$u(x, y) = \sin(x + y) \ , \ v(x, y) = \cos(x + y)$$

(b)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + y + z \\ v(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ w(x, y, z) &= xyz \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sin(x + y + z) \\ v(x, y, z) &= \cos(x^2 + y^2 + z^2) \\ w(x, y, z) &= \sin\sqrt{x + y + z} \end{aligned}$$

og finn i tilfelle relasjonen $f(u, v, w) = 0$.

16. (a) Gjeve vektorsettet

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{1,\ 0,\ 1\} \\ \mathbf{e}_2 &= \{1,\ 1,\ 0\} \\ \mathbf{e}_3 &= \{0,\ 1,\ 1\} \end{aligned}$$

Er dette vektorsettet ein basis for R^3 ?
Finn i tilfelle det resiproke settet.

(b) Innfør "nye" koordinatar

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + z\,, \\ \bar{y} &= x + y\,, \\ \bar{z} &= y + z\,. \end{aligned}$$

Rekn ut Jacobideterminanten og finn

$$\mathbf{r}_{\bar{x}}, \mathbf{r}_{\bar{y}}, \mathbf{r}_{\bar{z}}\ ,\ \nabla\bar{x}, \nabla\bar{y} \text{ og } \nabla\bar{z}\,.$$

Finn også eit uttrykk for gradientoperatoren, divergens og kvervling i desse nye koordinatane.

17. Sylinderkoordinatar

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\ \ \rho \geq 0\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= \bar{z} \end{aligned}$$

lat $\mathbf{f}$ vera ein vektor eller skalar og g ein skalarfunksjon. Finn $\nabla \cdot \mathbf{f}$, $\nabla\mathbf{f}$ og $\nabla^2 g$.

18. Ei flate er gjeven ved $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Lat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ vera det resiproke settet til $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$. Vis då at

    Ein vilkårleg vektorfunksjon $\mathbf{f}(u, v)$ definert over flata kan skrivast som

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}_u + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{b})\mathbf{r}_v + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

    og vis at

$$H^2\mathbf{a} = G\mathbf{r}_u - F\mathbf{r}_v, H^2\mathbf{b} = -F\mathbf{r}_u + E\mathbf{r}_v$$

    (E, F, G, H er definert under flater (3.73) og (3.80).

Kapittel 4

KVASILINEÆRE P.D.L.

4.1 KARAKTERISTIKK METODEN

Ei kvasilineær differensiallikning av første orden for den ukjende funksjonen $z = z(x, y)$ ser slik ut

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0\,. \tag{4.1}$$

Her er P, Q og R kjende differensierlege funksjonar av dei tre variable x, y og z over det aktuelle området. Likninga er såleis lineær i dei deriverte av den ukjende funksjonen z. (Dersom P og Q ikkje inneheld z, og R er ein lineær funksjon av z, så kallar ein likn.(4.1) for ei lineær første ordens partiell differensiallikning). Med den ålmenne (generelle) løysinga til denne likninga skal vi meine alle dei funksjonane $z = z(x, y)$ som stettar likninga. Til denne likninga skal vi knyta eit vektorfelt $\mathbf{V}$ definert ved

$$\mathbf{V} = \{P, Q, R\}\,. \tag{4.2}$$

Likninga for feltlinene til dette vektorfeltet (3.105) skal vi kalla for dei karakteristiske likningane til (4.1), og feltlinene til $\mathbf{V}$ skal vi kalla for karakteristikkane til likn.(4.1).

Teorem 4.1 *Lat $u(x, y, z) = c_1$ og $v(x, y, z) = c_2$ vera karakteristikkane til likn.(4.1). Lat vidare $w(u, v) = 0$ definera z implisitt som ein differensierleg funksjon av x og y. Då har vi at $z = z(x, y)$ er det ålmenne integralet til likn.(4.1), altså, inneheld alle løysingane.*

Vi skal visa dette teoremet i to steg: først at mengda av funksjonar $z = z(x, y)$ som definert i teoremet er løysingar, og dinest at denne mengda inneheld alle løysingane til likn.(4.1).

a) Lat $w(u, v) = 0$ vera gjeven som i teoremet. Då har vi at

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}} \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}}\,, \tag{4.3}$$

som innsett i venstresida av likn.(4.1) gjev etter multiplikasjon med $-\frac{\partial w}{\partial z}$,

$$Pw_x + Qw_y + Rw_z = \mathbf{V} \cdot \nabla w = w_u \mathbf{V} \cdot \nabla u + w_v \mathbf{V} \cdot \nabla v\,. \tag{4.4}$$

Men slik u og v er definerte så er $\mathbf{V} \cdot \nabla u = 0$ og $\mathbf{V} \cdot \nabla v = 0$.

b) Alle løysningar av likn.(4.1) er med i $w(u, v) = 0$. Lat oss gå ut frå det motsette, nemleg at det finnst ei løysing $r(x, y, z) = 0$ som ikkje er med i mengda w. Vi har då

$$\mathbf{V} \cdot \nabla r = 0\,. \tag{4.5}$$

Vi ser så på uttrykket $(\nabla u \times \nabla v) \cdot \nabla r$. Sidan $\nabla u \times \nabla v$ er parallell med $\mathbf{V}$ - det følgjer av at $u = c_1$ og $v = c_2$ er karakteristikkar (feltliner til $\mathbf{V}$) - har vi

$$(\nabla u \times \nabla v) \cdot \nabla r = k\mathbf{V} \cdot \nabla r = 0\,. \tag{4.6}$$

Men etter teorem **3.3** har vi då at det finst ein relasjon

$$f(u, v, r) = 0\,. \tag{4.7}$$

Med andre ord r er definert implisitt som funksjon av u og v, men dette var mot føresetnadene om at r ikkje var med i mengda w.

Q.E.D.

4.2 CAUCHY PROBLEMET

Den mengda av løysingar vi har funne til differensiallikninga (4.1), er så stor at ho ikkje er til noko større praktisk hjelp. Dette er eit uttrykk for at problemet med å løysa partielle differensiallikningar er sterkt knytt til randkrav eller startkrav for problemet ein skal løysa, dersom ein skal få eit eintydig svar. Randkrav betyr at løysinga for ei viss punktmengde skal ha eit fast verde. Eit startkrav betyr at ein vanlegvis tenkjer på eit fenomen som breier seg ut som funksjon av tida og at ein kjenner løysinga ved eit gjeve tidspunkt (Apostol T(9.2)). Vi skal koma meir inn på dette i samband med 2.ordens partielle differensiallikningar. Her skal vi stilla eit problem som har fått namnet Cauchy problemet:

Bestem ei løysing av likn.(4.1) som går gjennom ei fast gjeven regulær romkurve, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Spørsmål som vi skal svara på er:

- Korleis kan vi frå mengda av løysingar $w(u, v) = 0$ plukka ut den som passar ?
- Når har vi ei løysing (eksistens) ?
- Når er løysinga eintydig ?

Vi skal ta for oss to tilfelle:

- Romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \{x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\}$ tangerer ikkje ein karakteristikk i noko punkt.
- Romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ er ein karakteristikk.

Romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ tangerer ingen karakteristikk

Lat punktet $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ liggja på romkurva og ha parameterverdet t_0. Vi har då at dei to flatene $u(x, y, z) = c_1$ og $v(x, y, z) = c_2$ går gjennom dette punktet, dersom vi vel c_1 og c_2 slik at

$$c_1 = u(x_0, y_0, z_0) \ \text{ og } \ c_2 = v(x_0, y_0, z_0)\,. \tag{4.8}$$

No har vi at

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)\ \text{ og }\ z_0 = z(t_0)\,. \tag{4.9}$$

Dette kan vi setja inn i likningane, så vi får

$$c_1 = u(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0)) \equiv c_1(t_0)\,,$$

$$c_2 = v(x(t_0),\, y(t_0),\, z(t_0)) \equiv c_2(t_0)\,.$$

Vi skal skilja mellom tre tilfelle.

1)

$$\frac{dc_1}{dt_0} = \frac{dc_2}{dt_0} = 0\,. \tag{4.10}$$

Kurva vår $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ må no liggja i båe flatene $u = c_1$ og $v = c_2$ for faste verde $c_1 = c_1(t_0)$, $c_2 = c_2(t_0)$, men då er kurva ein karakteristikk imot føresetnaden. Difor kan vi ikkje ha dette tilfellet

2)

$$\frac{dc_1}{dt_0} \neq 0\ \text{ og }\ \frac{dc_2}{dt_0} = 0\ \text{ eller }\ \frac{dc_1}{dt_0} = 0\ \text{ og }\ \frac{dc_2}{dt_0} \neq 0\,. \tag{4.11}$$

Vi har no at romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ligg i flata $v = c_2$ i første tilfellet og i flata $u = c_1$ i andre tilfellet. Løysinga er då $v = c_2$ eller $u = c_1$ alt etter kva tilfelle vi har.

3)

$$\frac{dc_1}{dt_0} \neq 0\ \text{ og }\ \frac{dc_2}{dt_0} \neq 0\,. \tag{4.12}$$

Vi kan no i prinsippet eliminera t_0 mellom likningane $c_1 = c_1(t_0)$ og $c_2 = c_2(t_0)$ og får

$$\psi(c_1, c_2) = 0\,. \tag{4.13}$$

Set vi inn i denne likninga $c_1 = u(x, y, z)$ og $c_2 = v(x, y, z)$, så får vi

$$\psi(u(x,y,z)\ ,\ v(x,y,z)) = 0\,. \tag{4.14}$$

Dersom $\psi(u,v) = 0$ høyrer med under klassen $w(u,v) = 0$ i teorem **4.1**, så har vi funne ei eintydig løysing av problemet vårt. Vi har då

- $\psi(u,v) = 0$ definerer z implisitt som funksjon av x og y og denne funksjonen stettar likn.(4.1).
- Denne løysinga (integralflata $z = z(x,y)$) inneheld romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. (Ta eit vilkårleg punkt på romkurva og vis at dette må liggja på denne integralflata.)
- Løysinga er eintydig sidan det går ein og berre ein karakteristikk gjennom kvart punkt på romkurva, og denne karakteristikken ligg i integralflata $\psi(u,v) = 0$ eller $z = z(x,y)$.

Vi stiller no spørsmålet: Når vil $\psi(u,v) = 0$ høyra med til klassen $w(u,v) = 0$? Eller, når finnst det ei eintydig løysing av Cauchy-problemet?

- Merknad: $\psi(u,v)$ er ein differensierleg funksjon av sine argument. Vi har nemleg at u og v er differensierlege funksjonar av x, y og z og at romkurva vår er gjeven slik at $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ er differensierlege funksjonar av t. Då er $c_1 = u\{x(t_0)\ ,\ y(t_0)\ ,\ z(t_0)\} = F_1(t_0)$ og $c_2 = v\{x(t_0)\ ,\ y(t_0)\ ,\ z(t_0)\} = F_2(t_0)$ også differensierlege funksjonar. Vi har då at

$$c_2 = F_2\{g(c_1)\} \text{ eller } \psi(c_1,c_2) \equiv c_2 - F_2\{g(c_1)\} = 0\,. \tag{4.15}$$

Når vil $\psi(u,v) = 0$ definera z implisitt som funksjon av x og y ? Det implisitte funksjonsteoremet seier at kravet $\frac{\partial\psi}{\partial z} \neq 0$ er tilstrekkeleg. Vi minner om at vi har gjort føresetnaden $\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}$. Vidare har vi at $\mathbf{V} \cdot \nabla\psi = 0$ og $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\psi = 0$, sidan romkurva vår skal liggja på nivåflata $\psi = 0$. Frå dei to siste krava har vi at

$$\nabla\psi = \lambda(\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})\,. \tag{4.16}$$

Vi ser av denne likninga at

$$(\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}) \cdot \mathbf{k} \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \psi}{\partial z} \neq 0 \text{ og } \mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}\,. \tag{4.17}$$

Vi formulerer dette resultatet i følgjande teorem

Teorem 4.2 *Gjeve den partielle differensiallikninga*

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0\,, \tag{4.18}$$

(der P, Q og R er kontinuerlege differensierlege funksjonar av x, y, z i eit visst område $D \in R^3$) og ei regulær romkurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$) , $\mathbf{r} \in D$. Problemet med å finna ei løysing av likn.(4.18) som inneheld $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (Cauchy-problemet) har ei eintydig løysing dersom

$$(\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}) \cdot \mathbf{k} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{x}Q - \dot{y}P \neq 0$$

der $\mathbf{V} = \{P, Q, R\}$. Løysinga kan finnast eksplisitt ved hjelp av karakteristikk metoden.

Merk at punkt 2) $\frac{dc_1}{dt_0} \neq 0$ og $\frac{dc_2}{dt_0} = 0$ fell også inn under teorem **4.2**. Men løysingsprosedyren vert enklare i dette tilfellet.

- Merknad: Den mengda av karakteristikkar som går gjennom romkurva er ein ein-parameter familie av kurver genererte av dei c_1 og c_2 som er løysingsmengda til

$$\psi(c_1, c_2) = 0\,. \tag{4.19}$$

  Geometrisk kan vi sjå dette slik: Definer ein ein- parameterfamilie av kurver $r = r(s, t)$ som er slik at for $t = t_0$, så går kurva gjennom den gjevne romkurva i punktet $r_0 = r(t_0)$, og fell saman med karakteristikken gjennom dette punktet. Denne ein-parameterfamilien av kurver genererer integralflata (løysinga) $\psi(u, v) = 0$. Vi kan litt upresist seia at "karakteristikken" glir langs romkurva og på den måten genererer den flata som er løysinga på problemet.

Romkurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ fell saman med ein karakteristikk

Vi vel ei vilkårleg regulær romkurve som går gjennom denne karakteristikken og ikkje tangerer nokon karakteristikk. Gjennom denne romkurva går det ei løysing (integralflate), altså, karakteristikken ligg no i denne integralflata. Denne løysinga kan konstruerast eksplisitt på same måten som under (4.12). Sidan romkurva vi valde var vilkårleg går det uendeleg mange løysingar (integralflater) gjennom ein karakteristikk.

4.3 SINGULÆRE INTEGRAL

Føresetnaden vi gjorde når vi studerte Cauchy-problemet var: $\mathbf{V} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0}$. (Romkurva som integralflata skal gå gjennom skal ikkje ha samanfallande tangent med nokon karakteristikk). Det følgjer også frå denne føresetnaden at $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ i det området vi studerer.

Dersom vi har $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ på ei flate som er regulær, lat oss seia flata $\psi(x, y, z) = 0$ og der $\psi = 0$ definerer z implisitt som funksjon av x og y i det aktuelle området, då er $z = z(x, y)$, som er definert implisitt med ψ, ei løysing av (4.1). Dette ser ein lett ved å substituera inn i differensiallikninga (4.1). Ei slik løysing som det her er tale om kallar vi for ei singulær løysing, eller eit singulært integral.

Dersom $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ berre for isolerte punkt blir problemet meir komplisert og vi skal ikkje gå inn på det her.

4.4 FLEIRE UAVHENGIGE VARIABLE

Metoden med karakteristikkar og Cauchy's problem let seg lett generalisera til fleire uavhengige variable enn to.
Likninga

$$P_1 \frac{\partial x_n}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial x_n}{\partial x_2} + ... + P_{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} - P_n = 0\,, \tag{4.20}$$

har dei karakteristiske likningane

$$\frac{dx}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = ... = \frac{dx_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{dx_n}{P_n}\,. \tag{4.21}$$

som har $n - 1$ integral

$$U_1 = C_1 \ , \ U_2 = C_2 \ , ..., U_{n-1} = C_{n-1} \ , \tag{4.22}$$

der x_n er definert implisitt som funksjon av $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ gjennom

$$w(U_1, U_2, U_3, ...U_n) = 0 \, . \tag{4.23}$$

Cauchy problemet løyser ein også analogt ved å bestemma løysinga gjennom ei romkurve i R^n. Merk at ei "flate" i R^n innehelt $n-1$ parametrar og ei "kurve" $n-2$ parametrar.

Oppgåver:

1. Gjeve differensiallikninga

$$x^2 y \frac{\partial z}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2 z \ , \ z = z(x, y).$$

   (a) Finn det ålmenne integralet.

   (b) Løys Cauchy problemet når den gjevne romkurva er:

   i.

$$xy = 2 \ , \ z = 2 \, ,$$

   ii.

$$\mathbf{r}(t) = \{t, 2t, e^{t^2}\} \, .$$

   Drøft i kvart tilfelle om problemet har eintydig løysing.

2. Løys Cauchy problema

$$\begin{cases} zz_x + yz_y = x \\ z = 2t \text{ for } x = t, y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xz_x - yz_y = 0 \\ z = x^2 \text{ for } y = x \end{cases}$$

3. Løys desse Cauchy problema

   (a)

$$\begin{gathered} xz_x + yz_y = 1 \\ \mathbf{r} = -\mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3 \end{gathered}$$

(b)

$$(y+z)z_x + yz_y = x - y$$
$$\mathbf{r} = t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (1+t)\mathbf{e}_3.$$

(c)

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$$
$$z = 1 \text{ for } y = 2x.$$

4. Finn u, v og w slik at

$$\mathbf{v} = \{2yz, zx, 3xy\} = \nabla w + u\nabla v$$

Kapittel 5

ANDRE ORDENS P.D.L.

5.1 HYPERBOLSKE P.D.L.

Vi skal studera problemet med eintydig løysing av start og randverdiproblemet for prototypen på ei hyperbolske partiell differensiallikning. Denne likninga er typisk for fenomen som er knytt til utbreiing av udempa bølgjer. Vi skal sjå på den mest generelle form av ei 2.ordens partiell differensiallikning av hyperbolsk type i tre romvariable og ein tidsvariabel t, men utan demping d.v.s. ledd med førsteordens deriverte i tid. Vi kan skriva denne likninga som

$$\rho(\mathbf{r})\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla\cdot\{K(\mathbf{r})\nabla u\} - H(\mathbf{r})u\,, \tag{5.1}$$

der $\mathbf{r}=\{x,y,z\}$, $u=u(\mathbf{r},t)$ er den ukjente funksjonen og $\nabla = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Vidare går vi ut frå at $\rho(\mathbf{r})>0$, $K(\mathbf{r})>0$ og $H(\mathbf{r})\geq 0$ for heile det lukka området $D\subset R^3$, der problemet er definert, og at desse gjevne funksjonane er tilstrekkeleg glatte. Lat vidare Σ vera den flata i R^3 som avgrensar området D og $\mathbf{n}$ den tilhøyrande einings flatenormalen som peikar ut av volumet D.

Vi gjev følgjande start- og randkrav

$$\left.\begin{array}{rcl} u(\mathbf{r},0) & = & \phi(\mathbf{r}) \\ u_t(\mathbf{r},0) & = & \psi(\mathbf{r}) \end{array}\right\} \qquad r\in D\,, \qquad\qquad \alpha u+\beta\mathbf{n}\cdot\nabla u = 0 \qquad \mathbf{r}\in\Sigma\,. \tag{5.2}$$

Der $\alpha=\alpha(\mathbf{r})$ og $\beta=\beta(\mathbf{r})$ er tilstrekkeleg glatte funksjonar og slik at $\alpha\beta>0$ for $\mathbf{r}\in\Sigma$.

Vidare så må ϕ og ψ vera tilstrekkeleg glatte funksjonar for $\mathbf{r} \in D$.
Vi skal nå studera det såkalla "energi integralet"

$$E(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_D \{\rho w_t^2 + K(\nabla w)^2 + H w^2\} d\tau \,, \tag{5.3}$$

der w er ei løysing av (5.1) og $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$. Ved å bruka Gauss' sats og identiteten

$$\nabla \cdot \{w_t (K \nabla w)\} = w_t \nabla \cdot (K \nabla w) + K \nabla w \cdot \nabla w_t \,, \tag{5.4}$$

kan ein visa at

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_\Sigma K w_t \mathbf{n} \cdot \nabla w d\sigma \,. \tag{5.5}$$

Når ein vidare brukar at

$$\mathbf{n} \cdot \nabla w = -\frac{\alpha}{\beta} w \text{ for } \mathbf{r} \in \Sigma \,, \tag{5.6}$$

så får ein

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_\Sigma \frac{\alpha}{2\beta} K \frac{\partial}{\partial t}(w^2) d\sigma \,. \tag{5.7}$$

Ved å integrera likn.(5.7) frå $t = 0$ til $t = t_0$ får ein vidare at

$$E(t_0) - E(0) = -\int_\Sigma \frac{\alpha}{2\beta} K [w(\mathbf{r}, t_0)^2 - w(\mathbf{r}, 0)^2] d\sigma \,. \tag{5.8}$$

Vi har gått ut frå at w er ei løysing av likn.(5.1) som stettar randkravet (5.2) (det siste). Lat oss gå ut frå at det finst to løysingar u_1 og u_2 på problemet (5.1) - (5.2). Definer ein ny funksjon $w = u_1 - u_2$. Då vil w stetta randkravet i (5.2) og startkravet $w(\mathbf{r}, 0) = 0$, $w_t(\mathbf{r}, 0) = 0$.
Frå energi integralet har vi at $E(t) \geq 0$ og $E(t_0) \leq 0$ sidan $w(\mathbf{r}, 0) = 0$ og $E(0) = 0$ i (5.3), altså:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E(t) & \geq & 0 \\ E(0) & = & 0 \\ E(t_0) & \leq & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E(t) \equiv 0 \Rightarrow w(\mathbf{r}, t) \equiv 0 \,. \tag{5.9}$$

Problemet har difor ei eintydig løysing.

5.2 PARABOLSKE P.D.L.

Vi skal sjå på prototypen på ei parabolsk likning [1]

$$\rho(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \{K(\mathbf{r})\nabla u\} - H(\mathbf{r})u\,, \tag{5.10}$$

med start-randkrava

$$u(\mathbf{r},0) = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D\,, \tag{5.11}$$

$$\alpha u + \beta \mathbf{n} \cdot \nabla u = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma\,. \tag{5.12}$$

Der Σ er den flata som avgrensar området D der problemet er stilt, og $\mathbf{n}$ er einings flatenormalen ut av D. Vidare er $\rho > 0$, $K > 0$, $H \geq 0$ og $\alpha\beta > 0$. Alle funksjonane ovanfor, i tillegg til ϕ, skal vi gå ut frå er tilstrekkelege glatte. Gå ut frå at det finst to løysinger u_1 og u_2 på problemet gjeve ved likningane (5.10) - (5.12). Definer ein ny funksjon $w = u_1 - u_2$.
Vi ser på "integralet"

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_D \rho w^2 d\tau\,. \tag{5.13}$$

Vi har då at

$$E(0) = 0 \;\text{ sidan }\; w(0) = 0 \quad \text{og vidare er} \quad E(t) \geq 0\,. \tag{5.14}$$

Vi finn vidare

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\left\{\int_\Sigma \{\frac{\alpha}{\beta}Kw^2\}d\sigma + \int_D \{K(\nabla w)^2 + Hw^2\}d\tau\right\} \leq 0\,. \tag{5.15}$$

Vi har då

$$\left\{\begin{array}{rcl} E(t) & \geq & 0 \\ E(0) & = & 0 \\ \frac{d}{dt}E(t) & \leq & 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; E(t) \equiv 0 \;\Rightarrow\; w(\mathbf{r},t) \equiv 0\,. \tag{5.16}$$

Ved same tankeføringa som under hyperbolske likningar, ser vi at problemet som er stilt har ei eintydig løysing.

[1] Parabolske likningar er typiske for å skildra diffusjonsprosessar t.d. varmeleiing. I utgangspunktet er slike likningar "ufysikalske"i den meining at dei svarar til ei bølgjelikning med uendeleg fasefart for bølgja. Dei kan likevel gje ei god skildring av fenomen som er sakte i høve til karakteristisk fart for bølgjer i det aktuelle mediet

5.3 LAPLACE OG POISSON LIKNINGANE

5.3.1 Greens identitetar

Vi skal først visa to identitetar som kallast Green sin første og andre identitet.
Lat ϕ og ψ vera to tilstrekkeleg glatte funksjonar av dei tre romvariable x_1, x_2 og x_3 over eit område D. Då har vi

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi \,. \tag{5.17}$$

Brukar vi Gauss' integralsats, får vi:

Green sin første identitet

$$\int_D (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) d\tau = \int_\Sigma \phi \frac{d\psi}{dn} d\sigma \,, \tag{5.18}$$

der Σ er flata som avgrensar D og $\frac{d\psi}{dn} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n} \cdot \nabla \psi$. Vi byter om ϕ og ψ i denne formelen og subtraherer den siste formelen frå den første, då har vi:

Green sin andre identitet

$$\int_D \{\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\} d\tau = \int_\Sigma (\phi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\phi}{dn}) d\sigma \,. \tag{5.19}$$

Laplace si differensiallikning i tre dimensjonar ser slik ut i rettvinkla kartesiske koordinatar:

$$\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^3}\} \phi = 0 \,, \tag{5.20}$$

eller

$$\nabla^2 \phi = 0 \,. \tag{5.21}$$

∇^2 kallar ein gjerne for Laplace-operatoren. Løysingar av Laplace si likning kallar ein harmoniske funksjonar.
Den tilsvarande inhomogene likninga

$$\nabla^2 \phi = \rho \,, \tag{5.22}$$

der ρ er ein kjend funksjon av x_1, x_2 og x_3 kallast Poisson likninga.

Desse likningane er av elliptisk type og det finst ein omfattande litteratur om løysing av slike likningar, som gjerne går under namn av potensial teori. Vi skal først sjå litt på Laplace si likning.

Lat ϕ vera ein harmonisk funksjon i $D \subset R^3$ avgrensa av ei tilstrekkeleg glatt flate Σ. Då har vi frå Green's første identitet med $\psi = \phi$ at

$$\int_D (\nabla\phi)^2 d\tau = \int_\Sigma \phi \frac{d\phi}{dn} d\sigma \,. \tag{5.23}$$

Dersom ϕ eller $\frac{d\phi}{dn}$ er null over Σ, så har vi $\nabla\phi = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in D$ eller $\phi =$ konstant for $\mathbf{r} \in D$.

Av dette følgjer det også at for Laplace si likning, er:
Dirichlet problemet: $\phi(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Sigma$ eintydig bestemt.
Og
Neumann problemet: $\frac{d\phi}{dn}(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Sigma$ er eintydig bestemt på ein konstant nær.
Vis det.

Problem 1

Bestem eit vektorfelt $\mathbf{v}$ som stettar krava $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ i eit enkeltsamanhangande område D. Frå likninga $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ har vi at vi kan skriva $\mathbf{v} = \nabla\phi$ og då vi har $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0$. Dette problemet kan difor reduserast til å løyse Laplace si likning. Dersom ein legg på randkravet at normal komponenten til $\mathbf{v}$ over den flata Σ som avgrensar D skal vera gjeven: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_n = g(\mathbf{r})$, så er vektorfeltet eintydig bestemt. Kvifor ? Dersom tangential-komponenten til $\mathbf{v}$ er gjeven over Σ, så vil $\mathbf{v}$ vera eintydig bestemt.

Vink: Set $\phi = 1$ i Green's første identitet, det gjev for alle harmoniske funksjonar ψ at

$$\int_\Sigma \frac{d\psi}{dn} d\sigma = 0 \,. \tag{5.24}$$

Dersom tangential-komponenten til $\mathbf{v}$ er gjeven og det finst to vektorfelt $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som er løysingar, så må

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \,, \tag{5.25}$$

vera ei løysing som har tangential-komponenten lik null over Σ. Dette betyr at den tilsvarande potensialfunksjon ϕ (hugs at $\mathbf{u} = \nabla\phi$) må vera konstant over Σ. I integralet på H.s. i likn.(5.23) kan vi då setja ϕ utafor og brukar vi dette saman med likn.(5.24) følgjer resultatet. Vektorfeltet av denne typen blir gjerne kalla eit Laplace-felt.
Vi har også følgjande middelverde teorem for harmoniske funksjonar.

Teorem 5.1 *Verdet av ein funksjon ϕ, som er harmonisk i området D, i eit vilkårleg punkt $\mathbf{r}_0$ er lik middelverdien av funksjonen over ei vilkårleg kuleflate som ligg i D og har sentrum i $\mathbf{r}_0$.*

For å visa dette teoremet skal vi først visa Green's tredje identitet. Set $\psi = \frac{1}{r}$ i Green's 2.identitet, isoler punktet $r = 0$ med ei lita kuleflate S med radius ϵ. Sidan $\psi = \frac{1}{r}$ er ein harmonisk funksjon for $r \neq 0$, har vi når vi integrerer over $D' = D - K$ der K er kulevolumet og $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$,

$$-\int_{D'} \frac{1}{r}\nabla^2\phi d\tau = \int_\Sigma (\phi \frac{d}{dn}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dn})d\sigma + \int_S (\phi \frac{d}{dn}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dn})d\sigma\,. \qquad (5.26)$$

Over kuleflata med radius ϵ har vi

$$\frac{d}{dn}(\frac{1}{r}) = -\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}) = \frac{1}{\epsilon^2} \text{ og } \frac{d\phi}{dn} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\ ,\ d\sigma = \epsilon^2 d\Omega\,, \qquad (5.27)$$

der $d\Omega$ er romvinkelelementet. Vi får difor

$$I_S = \int_S (\phi \frac{d}{dn}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dn})d\sigma = \int_S (\frac{\phi}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\phi}{\partial r})\epsilon^2 d\Omega \ \rightarrow\ 4\pi\bar{\phi} + \mathcal{O}(\epsilon)\,. \qquad (5.28)$$

Her er $\bar{\phi}$ verdet av ϕ i eit punkt på S (middelverde teoremet for integral). Når vi går til grensa $\epsilon \rightarrow 0$, får vi

$$I_S \ \rightarrow\ 4\pi\phi(\mathbf{r}_0)\,. \qquad (5.29)$$

Vi får då som resultat det som gjerne kallast for:

Green sin tredje identitet

$$4\pi\phi(\mathbf{r}_0) = -\int_D \frac{\nabla^2\phi}{r}d\tau + \int_\Sigma \{\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dn} - \phi\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\}d\sigma\,. \tag{5.30}$$

Dersom $\mathbf{r}_0$ ligg utafor området vi integrerer over, treng vi ikkje isolera punktet med $r = 0$ under integrasjonen, i dette tilfellet er høgresida i likn.(5.30) lik null.

Lat oss sjå på middelverde teoremet for harmoniske funksjonar.

Lat ϕ vera ein harmonisk funksjon i likn.(5.30) og Σ ei kuleflate sentrert om det indre punktet $\mathbf{r}_0$ slik at heile kuleflata ligg i D, då har vi

$$\begin{aligned} 4\pi\phi(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{r}\int_\Sigma \frac{d\phi}{dn}d\sigma + \int_\Sigma \frac{\phi}{r^2}d\sigma \\ &= \frac{1}{r^2}\int_\Sigma \phi d\sigma\,, \end{aligned} \tag{5.31}$$

på grunn av likn.(5.24). Altså

$$\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_K \phi d\sigma\,, \tag{5.32}$$

der K er kuleflata med sentrum i $\mathbf{r}_0$ og radius r. Dette viser middelverde teoremet for harmoniske funksjonar, teorem **5.1** .

Dette teoremet viser også at ein funksjon som er harmonisk i eit lukka og avgrensa område og ikkje er konstant har ekstremalverde berre på randa.

Dette ser ein lett slik. Lat t.d. $\mathbf{r}_1$ vera eit randpunkt av den mengda S der ϕ har sitt minimumsverde m. Dersom $\mathbf{r}_1$ er eit indre punkt i D, så finst det ei kuleflate med sentrum i $\mathbf{r}_1$ som ligg heilt i D. På denne kuleflata vil det vera punkt slik at $\phi > m$ og ingen punkt der $\phi < m$ altså må middelverdet vera større enn $\phi(\mathbf{r}_1) = m$, altså ei sjølvmotseiing fordi middelverdet skulle vera lik $\phi(\mathbf{r_1})$. Tilsvarande kan ein visa dette resultatet for maksimumsverde.

Problem 2

Bestem vektorfeltet $\mathbf{v}$ når ein kjenner to funksjonar $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ og $\rho(\mathbf{r})$ slik at

$$\nabla\times\mathbf{v} = \mathbf{C}\ ,\ (\nabla\cdot\mathbf{C} = 0)\ \text{ og }\ \nabla\cdot\mathbf{v} = \rho\ ,\ \mathbf{r}\in D\,, \tag{5.33}$$

og tangential-komponenten eller normal-komponenten til $\mathbf{v}$ er gjeven over flata Σ som avgrensar D.

- Dersom problemet har løysing, så skal vi visa at vektorfeltet er eintydig bestemt. Som vanleg går vi ut frå at det finst to vektorfelt $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som er løysingar av problemet.

  Vi definerer eit nytt vektorfelt $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

  For dette feltet gjeld det at

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ og } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{5.34}$$

  og normal-komponenten eller tangential-komponenten over Σ er null. Altså er dette eit Laplace-felt, men sidan normal-komponenten eller tangential-komponenten over Σ er null, så er $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Vi kjem til bake til dette problemet under avsnitt **5.3.3**

5.3.2 Poisson likning

I visse høve kan vi løysa Poisson's likning slik: I Green's tredje identitet, likn.(5.30), substituerer vi frå Poisson's likning

$$\nabla^2 \phi = \rho \,, \tag{5.35}$$

og finn då

$$\phi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma (\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dn} - \phi \frac{d}{dn} \frac{1}{r}) d\sigma \,. \tag{5.36}$$

Vi ser difor at det er tilstrekkeleg å kjenna $\frac{d\phi}{dn}$ og ϕ over Σ, så vil $\phi(\mathbf{r}_0)$ vera bestemt ved formelen gjeven i likn.(5.36).

Merk at $r = \mid \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \mid$, $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ og $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$.

Dersom $r \frac{d\phi}{dn}$ og ϕ går som $r^{-\epsilon}$, $\epsilon > 0$ når $r \to \infty$, kan vi utvide området D til heile R^3. Vi får då

$$\phi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r} d\tau \,, \tag{5.37}$$

som gjev meining dersom ρ går raskt nok mot null når $r \to \infty$, slik at det ueigentlege integralet eksisterer.

5.3.3 Helmholtz' satsar

Helmholtz har synt korleis ein kan finna eit vektorfelt når ein kjenner divergensen og kvervlinga til vektorfeltet.
Vi har

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{C} \quad \text{og} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho, \ \ (\nabla \cdot \mathbf{C} = 0) \tag{5.38}$$

der ρ og $\mathbf{C}$ er gjevne funksjonar for $\mathbf{r} \in R^3$. Vi set

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{F}\,, \tag{5.39}$$

og skal finna ϕ og $\mathbf{F}$ slik at likningane (5.38) er stetta. Vi merkar oss at i og med at vi aukar orden på differensiallikningane på denne måten, så får vi ein viss fridom når det gjeld val av ϕ og $\mathbf{F}$. Vi ser t.d. utan vidare at vi kan addera til $\mathbf{F}$ ein vilkårleg vektor som er ein gradient utan at dette endrar $\mathbf{v}$. Vi skal no bestemma ϕ og $\mathbf{F}$ med tilleggskravet $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Set vi inn for $\mathbf{v}$ frå likn.(5.39) i likn.(5.38), finn vi

$$\nabla^2\phi = \rho \tag{5.40}$$
$$\nabla^2\mathbf{F} = -\mathbf{C} \tag{5.41}$$

Frå likn.(5.37) veit vi no at desse likningane har løysingane

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x_1',x_2',x_3')dx_1'dx_2'dx_3'}{\{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2\}^{\frac{1}{2}}}\,, \tag{5.42}$$

$$\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{C}(x_2',x_2',x_3')dx_1'dx_2'dx_3'}{\{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2\}^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{5.43}$$

Dermed har vi funne $\mathbf{v}$. Spørsmålet er berre om ρ og $\mathbf{C}$ går raskt nok mot null i $\pm\infty$ til at integrala eksisterer, og om $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Det første legg eit band på funksjonane ρ og $\mathbf{C}$.[2] Det andre kan ein lett syna er

[2]Mek at Laplace-operatoren verkande på ei vektorlikning slik vi har i likn.(5.41) ikkje utan vidare gjev meining utan at vi representerer vektoren (i dette høvet $\mathbf{F}$) i ein fast kartesisk basis

stetta. Dersom no $\mathbf{v}$ er bestemt ved likn.(5.39), (5.42) og (5.43), så vil også vektorfeltet $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \nabla\psi$ vera eit vektorfelt som stettar dei same likningane dersom ψ er ein harmonisk funksjon, altså: dersom $\nabla\psi$ er eit Laplace-felt. Vi kan sjå på dette problemet i analogi med problemet vi har når vi løyser ei inhomogen vanleg differensiallikning. Då får vi nemleg at den ålmenne løysinga er eit partikulært integral av den inhomogene likninga + den ålmenne løysinga av den homogene likninga. I vårt problem svarar det partikulære integalet til løysingane gjevne ved likn.(5.42) og (5.43). Den ålmenne løysinga av den homogene likninga svarar til $\nabla\psi$ der ψ er klassen av harmoniske funksjonar.

Men i eit spesifikt problem er ein vanlegvis ikkje tent med ei så generell løysing av problemet. Vi vil til vanleg krevja at løysingane skal stetta visse grensekrav i det endelege eller i det uendelege. Lat oss først sjå på det tilfellet at flata Σ avgrensar eit regulært området S, og vi dessutan krev at vektorfeltet vårt skal vera lik ein gjeven vektor $\mathbf{u}$ på Σ. Vi har då

$$\nabla\psi = \mathbf{u} - \mathbf{v}\,, \tag{5.44}$$

på Σ. Men når $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ er gjeven på Σ, så er også $\mathbf{n}\cdot\nabla\psi$ gjeven på Σ, der $\mathbf{n}$ er einings normalen ut frå flata Σ. Men då er $\nabla\psi$ eintydig bestemt sidan $\nabla\psi$ er eit Laplace-felt. Eit heilt anna problem er det å finna ψ i praksis, men det finst utvikla metodar også for det føremålet som det fører for langt å gå inn på her.

Vi skal til slutt berre nemna at dersom vi har grensevilkåra våre i uendeleg og krev at ψ og $r\frac{d\psi}{dn} \to 0$ raskt nok når $r \to \infty$, så vil det berre vera $\psi = 0$ som stettar desse grensevilkåra p.g.a. at $\rho = 0$ i likn.(5.40).