LaTeX-fil: M216fasit.tex *DRAFT: 19.4.2004*

VEKTOR
OG
TENSORANALYSE

Løyste oppgåver

av

Gerhard Berge

Matematisk institutt
UNIVERSITETET I BERGEN
April 2004

1 Kapittel 1

Oppgåve 1.1

Lat $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ vere ei kurve der bogelenga s er parameter. Då er $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ og $\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ eller $\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \kappa\mathbf{N}$, slik at $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}$. Vi finn då

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{N}\,u = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}\,u \quad u \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

Oppgåve 1.2

Frå oppgåve 1 har ein at $\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \kappa\mathbf{N}$ og resultatet følgjer frå dette.

Oppgåve 1.3

Gjeve skrulina

$$\mathbf{r}(t) = \{-a\,\sin t,\, a\,\cos t,\, b\,t\}\,. \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \{-a\,\cos t,\, -a\,\sin t,\, b\}\,. \tag{3}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\,\cos t,\, -a\,\sin t,\, b\}\,. \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}\{a\,\sin t,\, -a\,\cos t,\, 0\} = \kappa\mathbf{N}\,. \tag{5}$$

$$\mathbf{N} = \{\sin t,\, -\cos t,\, 0\} \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{b\,\cos t,\, b\,\sin t,\, a\} \tag{7}$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}\,, \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}\,, \quad K = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \tag{8}$$

Oppgåve 1.4

Vi har at

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = a_1 s + b_1 \\ y = a_2 s + b_2 \\ z = a_3 s + b_3 \end{cases}, \tag{9}$$

eller

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\, s + \mathbf{b} \tag{10}$$

Q. E. D.

Oppgåve 1.5

Null torsjon gjev

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \kappa\mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= -\kappa\mathbf{T} \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{T} \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \kappa\mathbf{N} \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T}) \\ &= \alpha_3\mathbf{N} + \beta_3\mathbf{T} \end{aligned}$$

Desse likningane impliserer at

$$\frac{d^n\mathbf{r}}{ds^n} = \alpha_n\mathbf{N} + \beta_n\mathbf{T}\,. \tag{11}$$

Av dette følgjer det at $\mathbf{r}(s)$ ikkje kan fjerna seg frå planet definert av vektorane $\mathbf{T}$ og $\mathbf{N}$.

Oppgåve 1.6

Vi finn

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \{1,\, -2,\, 3\} \quad \text{for} \quad t = 1 \tag{12}$$

and

$$\mathbf{r}(1) = \{2,\, -1,\, 2\} \tag{13}$$

slik at tangenten i dette punktet vert den rette lina

$$\hat{\mathbf{r}}(u) = \{2,\, -1,\, 2\} + \{1,\, -2,\, 3\}u, \qquad u \in (-\infty,\, +\infty)\,. \tag{14}$$

Planet gjennom hovudnormal og binormal finn ein lett kan skrivast som

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}(1)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(1) = 0\,, \tag{15}$$

som gjev

$$x - 2y + 3z - 10 = 0\,, \tag{16}$$

når $\mathbf{r} = \{x,\, y,\, z\}$.

Oppgåve 1.7

Lat den søkte romkurva vere

$$\hat{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(t) + u\frac{\mathbf{r}(t)}{dt} = \{\cos t,\, \sin t,\, t\} + u\{-\sin t,\, \cos t,\, 1\}\,. \tag{17}$$

Skjæring med x, y-planet vil seie $z = 0$ eller $u + t = 0$. Det gjev

$$\begin{aligned} x &= \cos u - u\sin u\,, & (18)\\ y &= -\sin u + u\cos u\,, & (19) \end{aligned}$$

som ei parameterframstilling av denne kurva.

Oppgåve 1.8

Torsjonen τ til ei kurve. Vi finn

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{T}|\mathbf{r}'|\,,\\ \mathbf{r}'' &= \mathbf{T}|\mathbf{r}'|' + |\mathbf{r}'|^2\kappa\mathbf{N}\,,\\ \mathbf{r}''' &= \left\{|\mathbf{r}'|'' - \kappa^2|\mathbf{r}'|^3\right\}\mathbf{T} + \left\{[|\mathbf{r}'|^2\kappa]' + |\mathbf{r}'||\mathbf{r}'|'\kappa\right\}\mathbf{N} + \left\{|\mathbf{r}'|^3\kappa\tau\right\}\mathbf{B} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}'''] = |\mathbf{r}'|^6\kappa^2\tau\,[\mathbf{T}\,\mathbf{N}\,\mathbf{B}] = |\mathbf{r}'|^6\kappa^2\tau \tag{20}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = |\mathbf{r}'|^3\kappa\mathbf{B}\,, \qquad |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = |\mathbf{r}'|^3\kappa\,, \tag{21}$$

Dei to siste resultata kan kombierast slik at ein får

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}''']}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} \tag{22}$$

Q. E. D.

2 Kapittel 2

Oppgåve 2.1

(b) I utgangspunktet har ein

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{u} &= 1\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{v} &= 1\\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{w} &= 1 \end{aligned}$$

Vi innfører

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{e}_1 & \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{a}\,, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{e}_2 & \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{b}\,, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{e}_3 & \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{w} &= \mathbf{c}\,. \end{aligned}$$

Ut frå dei gjevne relasjonane

$$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{u} = 0$$

og det faktum at $\boldsymbol{\Phi}$ alltid kan veljas symmetrisk, ser ein at vektorsetta $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ og $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{e}_3$ er resiproke sett sidan vi har:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{a} = 1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{b} = 0 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{a} = 0 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{b} = 1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{a} = 0 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{b} = 0 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{c} = 1 \end{array} \tag{23}$$

(b) Vi har

$$\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{uu} + \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{vv} + \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{cc} = \mathbf{e}^1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{I} \tag{24}$$

(c) Vi har at $\boldsymbol{\Phi}$ er ein konstant dyade. Det same er $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$. Difor er $\phi_1 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$, som er den første skalaren til $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$, også konstant. Den tredje skalaren til $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ er $\phi_3 = [\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}]^2$. Denne er også konstant og difor er $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{c}]$ også konstant.

Oppgåve 2.2

Vi har

$$\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\{\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Phi}_c\}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\{-\mathbf{I}\times\boldsymbol{\phi}\}\cdot\mathbf{v} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{I}\times\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{v} = -\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\phi}\times\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,. \tag{25}$$

Her er $\boldsymbol{\phi}$ vektoren til $\boldsymbol{\Phi}$.

Oppgåve 2.3

(i) Gå først ut frå at $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \neq 0$. Då er $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ og

$$\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\,, \quad \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\,, \quad \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\,,$$

resiproke sett. Av dette følgjer det at

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{I} \tag{26}$$

(ii) Deretter set vi $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$. Dette medfører at minst to av vektorane $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ er parallelle t.d. $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Men då har vi

$$\lambda\{\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{a})\} = \mathbf{0} \tag{27}$$

der høgresida er null-dyaden, altså gjeld likskapen også i dette høvet.

3 Kapittel 3

Oppgåve 3.1

Lat $f(r) \stackrel{def}{=} \frac{1}{r}$. Vi finn

$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = (\nabla f(r)) \cdot \mathbf{r} + f(r)\nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{r} + 3\, f(r) = -f(r) + 3\, f(r) = \frac{2}{r} \tag{28}$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \nabla f(r) \times \mathbf{r} + f(r)\nabla \times \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{r} = 0\,, \tag{29}$$

merk at $\nabla \times \mathbf{r} \equiv 0$

Oppgåve 3.2

Vi brukar kulekoordinatar

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\phi\,, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi\,, \\ z &= r\cos\phi\,, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x}\,, \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,, \end{aligned}$$

Vi har for posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ dekomponert i kartesiske koordinatar

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = \{r\cos\theta\sin\phi\,, r\sin\theta\sin\phi\,, r\cos\phi\} \tag{30}$$

Vi finn då

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r = \{\cos\theta\sin\phi\,,\ \sin\theta\sin\phi\,,\ \cos\phi\} &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}_r\,, \\ \mathbf{r}_\theta = \{-r\sin\theta\sin\phi\,, r\cos\theta\sin\phi\,,\ 0\} &\stackrel{def}{=} r\,\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta\,, \\ \mathbf{r}_\phi = \{r\cos\theta\cos\phi\,,\ r\sin\theta\cos\phi\,,\ -r\sin\phi\} &\stackrel{def}{=} r\,\mathbf{e}_\phi\,. \end{aligned}$$

der $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ er einingsvektorar og i samsvar med likn. (3.50) har ein $U = 1$, $V = r\,\sin\phi$ og $W = r$ slik at i desse koordinatane kan Laplace operatoren ∇^2 kan skrivast som (sjå likn. 3.56))

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{31}$$

Sidan det er oppgjeve at vår funksjon er berre ein funksjon av r finn ein at berre første leddet i likn. (31) gjev bidrag og vi finn

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\frac{d}{dr}f(r)] = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r = 0. \tag{32}$$

Når vi integrerer ein gong får ein

$$r^2\frac{d}{dr}f_r = -c_1\,,$$

og vidare $f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$.

Oppgåve 3.3

(a)

Lat $u = \frac{y}{x}$ og $v = xy - z^2$. Då er $\nabla u \times \nabla v = \frac{-2}{x^2}\{zx,\, yz,\, yx\}$ som er parallell med $\mathbf{V}$.

(b)

Ved å setje $u = y - x^2$ og $v = \frac{y+z}{x} - 2x$ finn ein at $\nabla u \times \nabla v$ er parallell med $\mathbf{V}$ også i dette tilfellet.

(c)

Svar oppgjeve.

(d)

Ein gjer det ved å syna at for alle desse oppgåvene er $\nabla u \times \nabla v \neq \mathbf{0}$.

Oppgåve 3.4

Eit vektorfelt $\mathbf{V}$ er gjeve og er divergensfritt ($\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$). Dersom vi har

$$\mathbf{V} = \nabla \mathbf{u} \times \nabla \mathbf{v}\,, \tag{33}$$

så følgjer det at $\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$, vi har nemleg,

$$\nabla \cdot (\nabla u \times \nabla v) = \nabla v \cdot \nabla \times \nabla u - \nabla u \cdot \nabla \times \nabla v = 0\,.$$

Omvend kan vi spørja om eit divergensfritt vektorfelt alltid kan skrivast slik. Lat oss gå ut frå at det er slik, og så prøva å bestemma u og v. Altså

$$\mathbf{V} = \nabla u \times \nabla v\,,$$

der vektorfeltet $\mathbf{V}$ no er gjeve. Då har vi etter føresetnaden at

$$\mathbf{V} \cdot \nabla u = 0 \qquad \text{og} \qquad \mathbf{V} \cdot \nabla v = 0\,.$$

Lat $u = u(x, y, z) = c$ vera eit integral av likninga $\mathbf{V} \cdot \nabla w = 0$ og lat $d\mathbf{r}$ vera eit line-element som ligg i flata $u = a$, altså $d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$ på flata $u = a$. Vidare har vi på denne flata at

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times d\mathbf{r} &= (\nabla u \times \nabla v) \times d\mathbf{r} \\ &= \nabla v\, \nabla u \cdot d\mathbf{r} - \nabla u\, \nabla v \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\nabla u\, \nabla v \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\nabla u dv\,. \end{aligned}$$

No må u vera ein funksjon av minst ein av dei variable (x, y, z) t.d. z, elles vert ∇u nullvektoren. Lat $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$, z-komponenten av likninga ovanfor gjev då

$$V_x dy - V_y dx = -u_z dv\,.$$

eller

$$v = -\int_C \frac{V_x dy - V_y dx}{u_z}\,,$$

der dette integralet vert rekna ut langs ei kurve C på flata $u = a$. Og vi har sett $\frac{\partial u}{\partial z} = u_z$, medan V_x og V_y står for komponentane til $\mathbf{V}$ i x og y retningen. Vi kan no visa at dette integralet er uavhengig av integrasjonsvegen. Vi har nemleg

$$V_x dy - V_y dx = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \mathbf{k} \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

og

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{V}}{u_z} \right) = -\frac{\nabla u_z}{u_z^2} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) + \frac{1}{u_z} \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V})\,,$$

Ein av vektoridentitetane gjev oss no at

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) &= \mathbf{k} \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{k} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \\ &= -\mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\,, \end{aligned}$$

Vidare har vi

$$\nabla u_z \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) = \mathbf{k}\, \mathbf{V} \cdot \nabla u_z - \mathbf{V}\, \mathbf{k} \cdot \nabla u_z\,.$$

Vi finn då

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{V}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \right) &= -\frac{1}{u_z^2} \mathbf{k} \cdot \nabla u\, \mathbf{V} \cdot \nabla u_z + \frac{1}{u_z^2} \mathbf{V} \cdot \nabla u\, \mathbf{k} \cdot \nabla u_z \\ &\quad -\frac{1}{u_z} \nabla u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{u_z} \left(\mathbf{V} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla u + \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V} \right) \\ &= -\frac{1}{u_z} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{V} \cdot \nabla u) = 0 \end{aligned}$$

Frå integralsatsen til Stoks følgjer det då at integralet langs kurva C mellom to punkt er uavhengig av vegval.

OPPSUMMERING:

Vi startar med å velja $u = u(x, y, z)$ som eit integral av likninga $\mathbf{V} \cdot \nabla w = 0$. Vi bestemmer oss for eit punkt (x_0, y_0, z_0), set $a = u(x_0, y_0, z_0)$ og ser så på flata $u(x, y, z) = a$. På denne flata har vi $\mathbf{V} \cdot \nabla u = 0$. Vi bestemmer så ein funksjon v ved

$$v = -\int_C \frac{V_y dx - V_x dy}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

der integralet kan vera frå punktet (x_0, y_0, z_0) til eit vilkårleg punkt (x, y, z) på denne flata. Vi har då definert $v(x, y, z)$ på flata $u = a$. Det same kan vi gjera for andre punkt, t.d. langs ei kurve som skjer flatefamilien $u = c$ der c er ein parameter. På den måten får vi definert $v = v(x, y, z)$ i heile det aktuelle området og vi har

$$
\begin{aligned}
\nabla u \times \nabla v &= -\nabla u \times \nabla \int_C \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{V}}{u_z}\cdot d\mathbf{r} \\
&= -\nabla u \times \nabla_s \int_C \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{V}}{u_z}\cdot d\mathbf{r} \\
&= -\nabla u \times \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{V}}{u_z}|_t \\
&= -\nabla u \times \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{V}}{u_z} \\
&= \mathbf{V}\frac{\mathbf{k}\cdot\nabla u}{u_z} - \mathbf{k}\frac{\mathbf{V}\cdot\nabla u}{u_z} = \mathbf{V}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Indeksen t står for projeksjonen av $\mathbf{k}\times\mathbf{V}$ i flata $u = a$.

KONKLUSJON:

Dersom $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$, kan vi alltid finna to funksjonar u og v slik at

$$\mathbf{V} = \nabla u \times \nabla v\,.$$

Oppgåve 3.5

Vi har at $\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{f}$ er eit divergensfritt vektorfelt. Frå resultata i oppgåve 3.4 har ein då at det finst to skalarfunksjonar u og v slik at

$$\nabla\times\mathbf{f} = \nabla u\times\nabla v = \nabla\times(u\,\nabla v)\,, \tag{34}$$

eller

$$\nabla\times\{\mathbf{f} - u\,\nabla v\} = 0\,. \tag{35}$$

Dette gjev

$$\{\mathbf{f} - u\,\nabla v\} = \nabla w \tag{36}$$

eller

$$\mathbf{f} = \nabla w + u\,\nabla v\,. \tag{37}$$

Oppgåve 3.6 Likningane for feltlinene vert

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2x^2} = \frac{dz}{y+z}\,, \tag{38}$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,,\quad \Rightarrow\quad c_1 = y - x^2\,,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y+z}{x} = \frac{z}{x} + \frac{c_1 + x^2}{x}\,,$$

der siste likninga kan omformast slik

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x\frac{d}{dx}(\frac{z}{x}) = \frac{c_1}{x} + x\,,$$

slik at vi har

$$\frac{d}{dx}(\frac{z}{x}) = \frac{c_1}{x^2} + 1\,,$$

integrasjon gjev

$$\frac{z}{x} = -\frac{c_1}{x} + x + c_2 = -\frac{y}{x} + 2x + c_2$$

slik at

$$c_2 = \frac{y+z}{x} - 2\,x\,.$$

Feltlinene til dette vektorfeltet vert difor skjæringskurvene mellom dei to flateskarane

$$\begin{aligned} u &= y - x^2\,, \\ v &= \frac{y+z}{x} - 2\,x\,. \end{aligned}$$

Kontroller svara ved å syne at $\nabla u \times \nabla v$ er parallell med $\mathbf{V}$. Eit tilleggsspørsmål kunne vere: Korleis bestemmer du feltlina som går gjennom eit oppgjeve punkt: $x = a$, $y = b$ og $z = c$?

Oppgåve 3.7

Vi har vektorfeltet

$$\mathbf{f} = x(y-z)\mathbf{i} + y(z-x)\mathbf{j} + z(x-y)\mathbf{k}\,. \tag{39}$$

Likningane for feltlinene ti $\mathbf{f}$ vert

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}\,,$$

og vi finn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{z-x}{y-z}\,, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}\frac{x-y}{y-z}$$

slik at

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1 = -\frac{dx}{dx}\,,$$

og vi finn

$$u(x,y,z) = x + y + z = C_1\,.$$

Vidare finn ein

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x + \ln y + \ln z\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(xyz) = 0\,,$$

slik at

$$\ln(xyz) = \hat{C}_2 \;\Rightarrow\; v(x,y,z) = xyz = C_2\,.$$

Vi har då

$$\mathbf{f} = \nabla v(x,y,z) \times \nabla u(x,y,z)\,.$$

Oppgåve 3.8

Utgangspunktet er vektor identiteten

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi \nabla^2 \psi \,. \tag{40}$$

Integrerer vi denne likninga over eit volum og nyttar Gauss sitt teorem (divergens-teoremet), så finn ein lett den første identiteten.

Den andre identiten finn ein lett ved å skriva opp denne identiteten to gonger. Byt så om ϕ og ψ i den siste og ta differensen, første leddet fell bort og ein får den andre identiteten.

Oppgåve 3.9

Vi skal visa følgjande identitet

$$\int_S \{\nabla_s \mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{nf}\} d\sigma = \oint \mathbf{mf} ds \,,$$

der $\mathbf{m} = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$. Ved å bruka Stokes generaliserte sats har vi

$$\oint_C \mathbf{T} \times \mathbf{nf} ds = \int_A (\mathbf{n} \times \nabla) \times (\mathbf{nf}) d\sigma \,.$$

Vi ser på

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \times \nabla) \times (\mathbf{nf}) &= n_i \frac{\partial}{\partial x_j}(n_k f_l)(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\mathbf{l} \\
&= \left(n_i (\frac{\partial}{\partial x_j} n_k) f_l + n_i n_k \frac{\partial}{\partial x_j} f_l \right) (\mathbf{e}_j \delta_{ik} - \mathbf{e}_i \delta_{jk}) \mathbf{e}_\mathbf{l} \\
&= \left(n_i (\frac{\partial}{\partial x_j} n_i) f_l) + n_i n_i \frac{\partial}{\partial x_j} f_l \right) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_\mathbf{l} \\
&\quad - \left(n_i (\frac{\partial}{\partial x_j} n_j) f_l + n_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j} f_l \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_\mathbf{l} \\
&= \nabla \mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{nf} - \mathbf{n}\,\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{f} \\
&= \nabla_s \mathbf{f} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{nf}
\end{aligned}$$

Merk at

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla_s \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{n} = \nabla_s \cdot \mathbf{n} \,.$$

Vi har nemleg $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \frac{d}{dn}\mathbf{n} = \frac{1}{2}\frac{d}{dn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$

Altså

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \times (\mathbf{nf}) = \nabla_s \mathbf{f} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{nf} \,,$$

som var det ein skulle visa.

Ein alternativ måte å vis dette resultatet på er det følgjande:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \times \nabla) \times (\mathbf{nf}) &= (\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{nf} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}\, \nabla \mathbf{f} - \mathbf{n}\, \nabla \cdot (\mathbf{nf}) \\
&= \nabla_s \cdot \mathbf{f} - ([\nabla_s + \mathbf{nn} \cdot \nabla] \cdot \mathbf{n})\mathbf{nf} \\
&= \nabla_s \cdot \mathbf{f} - (\nabla_s \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{nf} \,,
\end{aligned}$$

der vi har brukt formelen for det doble vektorproduktet og behandla ∇ som ein vektor-(operator). Men ein må alltid vere varsam når ein behandlar denne operatoren som ein vektor og halde fast på kva den verkar på som operator.

Oppgåve 3.10

Vi brukar Stokes generaliserte sats i følgjande versjon

$$\int_A d\sigma \mathbf{n} \times \nabla f = \oint_C d\mathbf{r} \times f \,. \tag{41}$$

Her er f ein skalarfunksjon, A ei flate og C er randa av denne flata. Vi tenkjer oss no ei lukka flate B slik at randa C som er ei lukka kurve ligg på denne flata og deler flata B i to deler B_1 og B_2. Vi brukar integralsatsen ovanfor på kvar av dei to flatene slik at normalvektoren til flatene vender ut or volumet som flata B avgrensar. Då vil ein følgja kurva C i motsett lei for dei to tilfella. Adderer vi så resultata får ein at

$$\oint_B d\sigma(\mathbf{n} \times \nabla f) = 0 \tag{42}$$

Dette resultatet kunne ein også funne lettare frå Gauss sin generaliserte sats.

Set no $f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ slik at $\nabla f = \{x, y, z\} = \mathbf{r}$. Vi finn då

$$\oint_B d\sigma(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = 0 \,. \tag{43}$$

Oppgåve 3.11

Momentet av eit flateelement $\mathbf{n}d\sigma$ med omsyn på origo (vilkårleg valt innafor flata) er $-p\mathbf{r} \times \mathbf{n}d\sigma$, og totalmomentet $\mathbf{M}$ finn ein ved å summere (integrere)

$$\mathbf{M} = -\oint p\mathbf{r} \times \mathbf{n}d\sigma = -p \oint \mathbf{r} \times \mathbf{n}d\sigma = 0 \tag{44}$$

etter resultatet i oppgåva før.

Oppgåve 3.12

Vi brukar på ny ein versjon av Stokes generaliserte sats

$$\int_A d\sigma \mathbf{n} \times \nabla f = \oint_C d\mathbf{r} f \,. \tag{45}$$

og set $f = \frac{1}{2}\{x^2 + y^2 + z^2\} = \frac{1}{2}r^2$ og $\mathbf{T}ds \stackrel{def}{=} d\mathbf{r}$. Vi finn $\nabla f = \mathbf{r}$ og

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{T} r^2 ds = \int_S d\sigma \mathbf{n} \times \mathbf{r} \,. \tag{46}$$

Oppgåve 3.13

Frå Gauss sin generaliserte sats

$$\int_V \nabla * \mathbf{V} d\tau = \oint_F \mathbf{n} * \mathbf{V} \, d\sigma \,, \tag{47}$$

finn ein når $* \to \times$ og $\mathbf{V} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ der $\mathbf{c}$ er ein konstant vektor

$$\int_V \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) d\tau = \oint_S \mathbf{n} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \, d\sigma \,. \tag{48}$$

No er $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$ og vi har

$$\oint_F \mathbf{n} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) \, d\sigma = 2V\mathbf{c} \tag{49}$$

Oppgåve 3.14

(a)

(i) Vilkåret er at determinanten

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}1t & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}t \end{vmatrix} \neq 0 \tag{50}$$

eller $D \stackrel{def}{=} \frac{1}{4}t^3 + 2 \neq 0$.

(ii) Dersom dette vilkåret er oppfylt har ein det resiproke settet

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{e}^1 & = & \frac{1}{D}\{ \quad \frac{1}{4}t^2 - 1, \quad \frac{1}{2}t + 1, \quad \frac{1}{2}t + 1\}\,, \\ \mathbf{e}^2 & = & \frac{1}{D}\{ \quad 1 + \frac{1}{2}t, \quad -\frac{1}{2}t - 1, \quad 1 - t\}\,, \\ \mathbf{e}^3 & = & \frac{1}{D}\{ \quad \frac{1}{2}t + 1, \quad 1 - t, \quad -\frac{1}{2}t^2 - 1\}\,, \end{array} \tag{51}$$

(b)

(i) Vi finn

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{t}_u = & \mathbf{r}_u = & \{ \quad u\,, \quad 1\,, \quad 1 \quad \} \\ \mathbf{t}_v = & \mathbf{r}_v = & \{ \quad 1\,, \quad -\frac{1}{2}v \quad 1 \quad \} \\ \mathbf{t}_w = & \mathbf{r}_w = & \{ \quad 1\,, \quad 1\,, \quad -\frac{1}{2}w \quad \} \end{array} \tag{52}$$

og i punktet $u = v = w = t$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{t}_u = & \mathbf{r}_u = & \{ \quad t\,, \quad 1\,, \quad 1 \quad \} \\ \mathbf{t}_v = & \mathbf{r}_v = & \{ \quad 1\,, \quad -\frac{1}{2}t \quad 1 \quad \} \\ \mathbf{t}_w = & \mathbf{r}_w = & \{ \quad 1\,, \quad 1\,, \quad -\frac{1}{2}t \quad \} \end{array} \tag{53}$$

(ii) Normalvektorane er gjevne ved ∇u, ∇v, ∇w. Her merkar vi oss at dette er det resiproke settet til $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w\}$ og ut frå reultatet ovanfor ser vi at dette er samanfallande med oppgåva før slik at når ein brukar resultatet frå denne oppgåva, finn ein same svaret som i likn. (51). Altså $\{\nabla u = \mathbf{e}^1\}$, $\{\nabla v = \mathbf{e}^2\}$ og $\{\nabla w = \mathbf{e}^3\}$ i denne likninga.

Oppgåve 3.15

(a)

Vi finn lett at ∇u og ∇v er parallelle slik at

$$\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}\,,$$

og difor er desse funksjonane funksjonelt avhengige. Vi har $u(x,y)^2 + v(x,y)^2 - 1 = 0$

(b)

Vi finn

$$\begin{array}{rcl} \nabla u & = & \{ \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \}\,, \\ \nabla v & = & \{ \quad x, \quad y, \quad z, \quad \}\,, \\ \nabla w & = & \{ \quad yz, \quad xz, \quad xy, \quad \}\,, \end{array} \tag{54}$$

og $[\nabla u, \nabla v, \nabla w] = x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x) \not\equiv 0$, slik at desse funksjonane er funksjonelt uavhengige.

(c)

Vi finn lett at ∇u og ∇w er parallelle slik at $[\nabla u, \nabla v, \nabla w] = 0$ i dette tilfellet og desse funksjonane er då funksjonelt avhengige.

Vi har $\quad \sin^{-1}(u(x,y,z)) - \left\{\sin^{-1}(w(x,y,z))\right\}^2 = 0.$

Oppgåve 3.16

(a)

Vi inn $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 2 \neq 0$, altså er dette ein basis. Det resiproke settet er

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \tfrac{1}{2}\{\,1, \quad -1, \quad 1\,\}, \\ \mathbf{e}^2 &= \tfrac{1}{2}\{\,1, \quad 1, \quad -1\,\}, \\ \mathbf{e}^3 &= \tfrac{1}{2}\{\,-1, \quad 1, \quad 1\,\}. \end{aligned}$$

(b)

Nye koordinatar

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + y\,, \\ \bar{x} &= x + y\,, \\ \bar{x} &= x + y\,, \end{aligned} \tag{55}$$

Vi finn

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\{\bar{x} + \bar{y} - \bar{z}\}\,, \\ y &= \tfrac{1}{2}\{\bar{y} + \bar{z} - \bar{x}\}\,, \\ z &= \tfrac{1}{2}\{\bar{z} + \bar{x} - \bar{y}\}\,. \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\bar{x}} &= \tfrac{1}{2}\{1,-1,1\} = \mathbf{e}_1\,, & & & \mathbf{e}^1 &= \{1,0,1\} &= \nabla\bar{x}\,, \\ \mathbf{r}_{\bar{y}} &= \tfrac{1}{2}\{1,1,-1\} = \mathbf{e}_2\,, & \Rightarrow & & \mathbf{e}^2 &= \{1,1,0\} &= \nabla\bar{y}\,, \\ \mathbf{r}_{\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}\{-1,1,1\} = \mathbf{e}_3\,. & & & \mathbf{e}^3 &= \{0,1,1\} &= \nabla\bar{z}\,. \end{aligned} \tag{57}$$

Lat $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = \bar{y}$ og $x_3 = \bar{z}$. Då har vi $\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathbf{V} = \mathbf{e}_j V^j = \mathbf{e}^j V_j$. Vi har då

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V^i}{\partial x^i}\,. \tag{58}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \tag{59}$$

Oppgåve 3.17

Sylinderkoordinatar:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\,, \\ y &= r\sin\theta\,, \\ z &= \bar{z}\,, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x}\,, \\ \bar{z} &= z\,, \end{aligned}$$

Vi har for posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ dekomponert i kartesiske koordinatar

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = \{r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, \bar{z}\} \tag{60}$$

Vi finn då

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r = \{\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0\} &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}_r\,, \\ \mathbf{r}_\theta = \{-r\sin\theta\,, r\cos\theta\} &\stackrel{def}{=} r\,\mathbf{e}_\theta\,, \\ \mathbf{r}_{\bar{z}} = \{0\,, 0\,, 1\} &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}_{\bar{z}}\,. \end{aligned}$$

der $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_{\bar{z}}$ er einingsvektorar og i samsvar med likn. (3.50) har ein $U=1$, $V=r$ og $W=1$ slik at i desse koordinatane har vi

$$\nabla\mathbf{f} = \mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\theta} + \mathbf{e}_{\bar{z}}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\bar{z}} \tag{61}$$

og

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial\mathbf{f}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{f}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\mathbf{f}_{\bar{z}}}{\partial\bar{z}}\,, \tag{62}$$

der $\mathbf{f}_r = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_\theta = \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{f}$ og $\mathbf{f}_{\bar{z}} = \mathbf{e}_{\bar{z}}\cdot\mathbf{f}$.

Laplace operatoren ∇^2 kan skrivast som (sjå likn. 3.56))

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}^2} \tag{63}$$

Oppgåve 3.18

I denne oppgåva har vi at $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$ og $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. $\mathbf{n}$ er resiproke sett. Av dette følgjer det at einingsdyaden $\mathbf{I}$ kan skrivast som

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}\mathbf{r}_u + \mathbf{v}\mathbf{r}_v + \mathbf{n}\mathbf{n}\,. \tag{64}$$

Første resultatet følgjer frå $\mathbf{f}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{f}$.

Det andre problemet kan løysast slik

$$G\mathbf{r}_u - F\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v\,\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v\,\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v\times(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v) = \mathbf{r}_v\times\mathbf{n}\,|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v| = \mathbf{a}\,|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2\,.$$

Sidan $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v) = (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\times\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v = EG - F^2 = H^2$, så følgjer løysing av første delen av problemet frå dette. Andre delen av problemet kan visast på tilsvarande måte.

4 Kapittel 4

Oppgåve 4.1

(a)

$$x^2 y\frac{\partial z}{\partial x} + x\, y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2 z$$

Dei karakteristiske likningane

$$\frac{dx}{x^2y} = \frac{dy}{x\, y^2} = \frac{dz}{x^2y^2 z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\, y^2}{x^2 y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = c_1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2y^2 z}{x^2 y} = yz = \frac{x}{c_1} z$$

eller

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{c_1} x dx \quad \Rightarrow \quad z e^{-\frac{1}{2}xy} = c_2$$

Generell løysing

$$\psi = \psi(\frac{x}{y}, z e^{-\frac{1}{2}xy})$$

(b)

i.
Kurva er $xy = 2,\ z = 2$. Frå

$$\frac{x}{y} = c_1\,, \quad z e^{-\frac{1}{2}xy} = c_2$$

finn ein

$$c_2 = 2\, e^{-1} = konst.\,, \quad c_1 = \frac{1}{2}x^2\,,$$

dette syner at kurva ikkje er ein karakteristikk. Kurva ligg i flata

$$z e^{-\frac{1}{2}xy} = \frac{2}{e}$$

eller

$$z = \frac{2}{e} e^{\frac{1}{2}xy}$$

Ein viser lett ved å rekne ut $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ og så substituere i likninga vi starta med, at dette tilfredstiller likninga. Dessutan er det lett å sjå at den oppgjevne kurva også ligg i denne integralflata.

ii.
Romkurva er

$$\mathbf{r}(t) = \{t,\, 2t,\, e^{t^2}\}$$

vi finn $\frac{x}{y} = c_1 = \frac{1}{2}$, altså ligg romkurva i flata

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\,,$$

som er eit plan.

vi finn også at

$$ze^{-\frac{1}{2}xy} = c_2$$

innsett får ein $e^{t^2}\, e^{-\frac{1}{2}t\cdot 2t} = 1 = c_2$. Slik at romkurva også ligg i $ze^{-\frac{1}{2}xy} = 1$. Romkurva er difor ein karakteristikk

Oppgåve 4.2

Likninga er

$$z\, z_x + y\, z_y = x\,.$$

Karakteristikkane er gjevne ved likningane

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x}$$

slik at

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{z} \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - x^2 = c_1 = u(x,z)$$

og vidare

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+c_1}} = \frac{d}{dx}\{\ln(x+\sqrt{x^2+c_1})\}$$

altså

$$\ln|y| = \ln(x+\sqrt{x^2+c_1}) + \ln c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x+\sqrt{x^2+c_1}} = c_2$$

eller

$$\frac{y}{x+z} = c_2 = v(x,y,z)\,.$$

Vi har kurva $\mathbf{r}(t) = \{t,\, 1,\, 2t\}$.

$$c_1(t) = 4t^2 - t^2 = 3t^2 \qquad c_2(t) = \frac{1}{3t}$$

slik at $3c_1c_2^2 = 1$ og vi finn

$$3\frac{(z-x)y^2}{x+z} = 1$$

som svar på problemet.

Vi har likninga

$$xz_x - yz_y = 0\,,$$

med dei karakteristiske likningane

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}\,,$$

slik at vi får

$$z = c_1\,, \qquad \ln x + \ln y = \ln c_2 \quad \Rightarrow \quad xy = c_2\,.$$

Innsett frå kurva finn ein $c_1 = t^2$ og $c_2 = t^2$, slik at $c_1 = c_2$ eller

$$z = xy\,,$$

som er svaret.

Oppgåve 4.3

(a)
Likninga er

$$xz_x + yz_y = 1\,,$$

med dei karakteristiske likningane

$$\frac{dx}{x} = +\frac{dy}{y} = \frac{dz}{1}\,,$$

slik at vi får

$$\frac{x}{y} = c_1\,, \quad \frac{1}{x}e^z = c_2\,.$$

Kurva er

$$\mathbf{r} = \{-1,\, 2t,\, t^2\}$$

og vi finn $c_1(t)$

$$\ln(\frac{e^z}{-x}) = \frac{y^2}{4x^2}\,, \quad (x < 0)\,.$$

eller

$$e^z = -xe^{\frac{y^2}{4x^2}}\,.$$

(b)
Likninga er

$$(y+z)z_x + y\,z_y = x - y\,,$$

med dei karakteristiske likningane

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+z}\,, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y+z} \quad ,$$

$$\frac{d}{dx}(y+z) = \frac{x}{y+z}\,, \quad \Rightarrow \quad (y+z)^2 - x^2 = c_1$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y}\,, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y+z}{y}\,, \quad \frac{d(x+z)}{dy} = \frac{x+z}{y}\,,$$

$$\frac{x+z}{y} = c_2$$

$$\mathbf{r} = \{t,\, 1,\, 1+t\}\,.$$

Vi finn $c_1(t) = 2(t+2)$ og $c_2(t) = 2t+1$, slik at

$$c_1(t) = 2c_2(t) + 2 \quad \Rightarrow \quad (y+z)^2 - x^2 = 2\frac{x+z}{y} + 2\,.$$

c)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} \tag{65}$$

Vi finn

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1\,, \qquad \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = c_2\,, \tag{66}$$

Romkurva kan også skrivast som $\mathbf{r}(t) = \{t,\, \frac{1}{2}t,\, 1\}$. Løysing

$$1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0\,. \tag{67}$$

Oppgåve 4.4

Vi har

$$\mathbf{v} = \{2yx,\, xz,\, 3xy\} = \nabla w + u\nabla v$$

slik at $\mathbf{f} \stackrel{def}{=} \nabla \times \mathbf{v} = \nabla u \times \nabla v = \{2x,\, -y,\, -z\}$. Vi søkjer etter feltlinene til $\mathbf{f}$. Altså løysing av likningane

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-z}\,.$$

Som løysingar finn vi

$$xy^2 = c_1\,, \quad \frac{y}{z} = c_2\,.$$

Vi har $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \nabla w \cdot d\mathbf{r} + u\nabla v \cdot d\mathbf{r}$. På flata v =konstant er $\nabla v \cdot d\mathbf{r} = 0$, altså $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \nabla w \cdot d\mathbf{r} = dw$, slik at $w = \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ langs $y/z = a$ der a er ein konstant. Vi finn

$$\begin{aligned} w &= \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int (2yz\,dx + xz\,dy + 3xy\,dz) \\ &= \int (\frac{2y^2}{a}\,dx + \frac{4xy}{a}\,dy) \\ &= \frac{2xy^2}{a} = 2xyz \end{aligned}$$

Merk at langs flate $v = \frac{y}{z} = a$ er $x =$ konstant $dx = 0$. Likninga $\mathbf{v} = \nabla w + u\nabla v$ kan vi no bruke til å bestemma u. vi har

$$\{2yz,\, xz,\, 3xy\} = \{2yz,\, 2xz,\, 2xy\} + u\{0,\, \frac{-z}{y^2},\, \frac{1}{y}\}$$

slik at $u = xy^2$. Merk at $\mathbf{f}\cdot\nabla u = 0$. Løysinga er då:

$$u = xy^2\,, \qquad v = \frac{y}{z}\,, \qquad w = 2xyz\,.$$

5 Kapittel 5

Oppgåve 5.1 Vi har

$$\nabla r = \frac{(x_i - x_i')\mathbf{e}_i}{r} \quad \text{og} \quad \nabla' r = \frac{-(x_i - x_i')\mathbf{e}_i}{r}$$

slik at $\nabla r = -\nabla' r$ og då $\nabla \mathbf{f}(r) = \frac{d\mathbf{f}}{dr}\nabla r$ og $\nabla' \mathbf{f}(r) = \frac{d\mathbf{f}}{dr}\nabla' r$ følgjer resultatet frå dette.

Oppgåve 5.2

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{r}\right) d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int \mathbf{C}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \mathbf{C}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{r}\right) d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\int\int \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{r}\right) dS'
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$. Dersom $\mathbf{C}$ går raskt nok mot null når $r \to \infty$ t.d. $\mathbf{C} \to \frac{1}{r^{1+\epsilon}}$ der $\epsilon > 0$, så går dette bra.

6 Kapittel 6

Oppgåve 6.1

Vi har

$$g_{ik}g^{kl} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \, \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^\ell = \mathbf{e}_i \cdot \left\{\mathbf{e}_k \, \mathbf{e}^k\right\} \cdot \mathbf{e}^\ell = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}^\ell = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^\ell = \delta_i^\ell$$

Oppgåve 6.2

Vi har

$$\det\{a_i^j\} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1$$

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad \text{for} \quad i,j,k \quad \text{lik permutasjon av} \quad 1,2,3 \\ -1 \quad \text{for} \quad i,j,k \quad \text{ulik permutasjon av} \quad 1,2,3 \end{cases}$$

Dette stemmer med definisjonen av ein determinant.

Oppgåve 6.3

Vi har at

$$a_i^r A_r^i = a$$

representerer determinanten oppspalta etter søyle nr. 3, (Laplace utvikling). Merk at dersom eit element i ei rekkje (søyle) vert multiplisert med kofaktoren til eit element i ei annan rekkje (søyle) og summert, så vert resultatet null (svarar til ein determinant med to like rekkjer (søyler).

Oppgåve 6.4

Vi har

$$\bar{\mathbf{e}}^j \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \gamma_r^j \mathbf{e}^r \cdot c_i^s \mathbf{e}_s = \gamma_r^j c_i^s \mathbf{e}^r \cdot \mathbf{e}_s = \gamma_r^j c_i^s \delta_s^r = \gamma_r^j c_i^r = \delta_i^j$$

Q.E.D.

Oppgåve 6.5

Lat $\bar{\mathbf{e}}^i$ og $\mathbf{e}_i$ vere to basisar som er valde vilkårleg med dei tilsvarande resiproke basisane $\bar{\mathbf{e}}_i$ og $\mathbf{e}^i$. For to vilkårlege vektorar $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har ein då

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{u}_i \bar{\mathbf{e}}^i = u_i \mathbf{e}^i \\ \mathbf{v} &= \bar{v}^j \bar{\mathbf{e}}_j = v^j \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Vi finn då at skalarproduktet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \bar{u}_i \bar{v}^i = u_i v^i$$

er invariant.

Oppgåve 6.6

Vi skriv

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}^i = v^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w} &= w_i \mathbf{e}^i = w^i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= u_i v_j w_k [\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k] = u^i v^j w^k [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k] \\ &= u_i v_j w_k \varepsilon^{ijk} E^{-1} = u^i v^j w^k \varepsilon_{ijk} E \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} E^{-1} = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} E \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u} & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v} & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{w} & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{w} & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{w} \end{vmatrix} \frac{1}{[\mathbf{e}_1 \, \mathbf{e}_2 \, \mathbf{e}_3]} \end{aligned}$$

No kan $\{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\}$ vere eit vilkårleg ikkje-koplanart set av vektorar t. d. $\{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\}$, vi har difor det generelle resultatet

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}][\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{u} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix}$$

Når vi no vel $\{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\}$=$\{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\}$ og $\{\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}\}$=$\{\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3\}$, får ein

$$E^2 = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]^2 = g = \det g_{ij}\,,$$

og tilsvarande

$$E^{-2} = \frac{1}{g} = \det g^{ij}\,,$$

ved å gå ut frå det resiproke settet.

Oppgåve 6.7

For å vise at g_{ij} er dei kovariante komponentane til ein tensor, må vi visa at dei følgjer dei kovariante transformasjonslovane. Ut frå definisjonen har ein

$$g_{ij} \overset{def}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

svarande til koordinatane x^1, x^2, x^3. Vi innfører nye koordinatar ved $\bar{x}^i$=$\bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$.

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_{x^i}\,, \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{r}_{\bar{x}^i}\,, \quad \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \mathbf{r}_{\bar{x}^i} \cdot \mathbf{r}_{\bar{x}^j}$$

$$\mathbf{r}_{\bar{x}^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \mathbf{e}_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

og

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_\ell = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}\,.$$

Tilsvarande finn ein også for $\bar{g}^{ij}$.

Q.E.D:

Oppgåve 6.8

Dette er berre rett fram seinking av indeksar.

Oppgåve 6.9

a)

Merk at posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ ikkje er ein vektor i streng forstand sett frå tensoranalysen sin definisjon av ein vektor. Den følgjer med andre ord ikkje transformasjonslovene for ein vektor. Posisjonsvektoren er ikkje invariant, men tvert imot avhengig av kor vi plasserer origo i koordinatsystemet.

Men differensialet eller lineelementetet $d\mathbf{r}$ er ein vektor, difor er også fartsvektoren ein vektor. Lat $\mathbf{r}$ vere posisjonsvektoren til ein partikkel. Gjeve i eit krumline koordinatsystem, om vi transformer, har ein

$$\mathbf{v} \overset{def}{=} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{dx^j}{dt}\mathbf{e}_j = \frac{d\bar{x}^j}{dt}\bar{\mathbf{e}}_j$$

og vidare

$$v^j = \frac{dx^j}{dt}, \qquad \bar{v}^j = \frac{d\bar{x}^j}{dt},$$

som altså er eit uttrykk for dei kovariante fartsvektor komponentane i generelle koordinatar. Med ein koordinatttransformasjon $x^j \to \bar{x}^j$, finn ein

$$\frac{d\bar{x}^j}{dt} = \frac{d\bar{x}^j}{dx^j}\frac{dx^j}{dt}, \quad \text{eller} \quad \bar{v}^j = \frac{d\bar{x}^j}{dx^j}v^j$$

som er transformasjonslova for ein kontravariant vektorkomponent. Ein annan måte å sjå dette på er å ta utgangspunkt i likninga

$$\frac{dx^j}{dx^j}\mathbf{e}_j = \frac{d\bar{x}^j}{dx^j}\bar{\mathbf{e}}_j$$

og så skalarmultiplisere denne likninga med $\bar{\mathbf{e}}^k$ og brukar at

$$\bar{\mathbf{e}}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\mathbf{e}^i$$

då får ein same resultatet. For akselerasjonen finn ein

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^j}{dt}\mathbf{e}_j + v^j\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{d^2x^j}{dt^2}\mathbf{e}_j + \frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma^r_{jk}\mathbf{e}_r = \frac{d^2x^j}{dt^2}\mathbf{e}_j + \frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}\Gamma^j_{rs}\mathbf{e}_j$$

der vi har brukt at

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \Gamma^r_{jk}\mathbf{e}_r$$

For akselerasjonen a^j har ein då

$$a^j = \frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}\Gamma^j_{rs}$$

b)

Vi har no

$$\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j \quad \mathbf{a} = a^j\mathbf{e}_j$$

storleiken på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{a}$ i retningen $\mathbf{e}_1$ er $v^1|\mathbf{e}_1|$ og $a^1|\mathbf{e}_1|$ der

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1},$$

og her er $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ partikkelbanen. Tilsvarande har ein for dei andre komponentane.

c)

Sylinderkoordinatar

$$\begin{array}{lcl} x = \rho\cos\theta & & x^1 = \rho \\ y = \rho\sin\theta & \to & x^2 = \theta \\ z = z & & x^3 = z \end{array}$$

$$\mathbf{r} = \{x,\, y,\, z\} = \{\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta,\, z\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{x^1} &= \{\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0\} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r \\
\mathbf{r}_{x^2} &= \{-\rho\sin\theta,\, \rho\cos\theta,\, 0\} = \mathbf{e}_2 = \rho\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{r}_{x^3} &= \{0,\, 0,\, 1\} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^1} &= 0\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^2} = \{-\sin\theta,\, \cos\theta,\, 0\} = \frac{1}{x^1}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^3} = \{0,0,0\}\,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^1} &= \{-\sin\theta,\, \cos\theta,\, 0\} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^2} = -\rho\{\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0\} = -\rho\mathbf{e}_1 = \rho\mathbf{e}_r\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^3} = \{0,0,0\} \\
\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^1} &= \{0,0,0\}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^2} = \{0,0,0\}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^3} = \{0,0,0\}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{e}_j
$$

$$
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho}\,, \quad \Gamma^1_{21} = -\rho
$$

$$
\begin{array}{lll}
v^r = \dot\rho & a^\rho = \ddot\rho - \dot\theta^2\rho & \ddot\rho - \dot\theta^2\rho \\
v^\theta = \dot\theta & a^\theta = \ddot\theta + \frac{2}{\rho}\dot\rho\dot\theta & \rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta \\
v^z = \dot z & a^z = \ddot z & \ddot z
\end{array}
$$

der den siste kollonnen representerer dei fysiske komponentane.

Kulekoordinatar

$$
\begin{array}{lcl}
x = r\sin\theta\cos\phi & & x^1 = r \\
y = r\sin\theta\sin\phi & \rightarrow & x^2 = \theta \\
z = r\cos\theta & & x^3 = \phi
\end{array}
$$

$$
\mathbf{r} = \{x,\, y,\, z\} = r\{\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta\}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{x^1} &= \{\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta\} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r \\
\mathbf{r}_{x^2} &= r\{-\sin\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\phi,\, 0\} = \mathbf{e}_2 = r\mathbf{e}_\phi \\
\mathbf{r}_{x^3} &= r\{\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, -\sin\theta\} = \mathbf{e}_3 = r\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^1} &= 0\,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^2} &= \{-\sin\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\phi,\, 0\} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi\,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^3} &= \{\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, 0\} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\theta\,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^1} &= \{\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, 0\} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta \\
\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^2} &= r\{-\sin\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\phi,\, 0\} = r\mathbf{e}_\phi\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^3} &= r\{-\sin\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, -\cos\theta\} = \cot\theta\mathbf{e}_2 \\
\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^1} &= \{\cos\theta\cos\phi,\, \cos\theta\sin\phi,\, -\sin\theta\} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\theta\,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^2} &= r\{-\cos\theta\sin\phi,\, \sin\theta\cos\phi,\, 0\} = \cot\theta\mathbf{e}_2 = \cot\theta\mathbf{e}_\phi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^3} &= r\{-\sin\theta\cos\phi,\, -\sin\theta\sin\phi,\, -\cos\theta\} = -r\mathbf{e}_1\,,\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}\,, & \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}\,, & \Gamma^r_{\theta\theta} = -r\,, \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta\,, & \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\,, & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a^k &= \ddot{x}^k + \dot{x}^r\dot{x}^s\Gamma^k_{rs}\,, \\
a^r &= \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\,, \\
a^\theta &= \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,, \\
a^\phi &= \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta\,.
\end{aligned}
$$

Her er $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = r$ og $|\mathbf{e}_3| = r\sin\theta$.

Oppgåve 6.10

Her er det å merka at kofaktorelementet G^{ij} oppfyller likninga $G^{ij} = g\,g^{ij}$ sidan g_{ij} og g^{ij} er inverse. Resultatet følgjer rett fram frå dette.

Oppgåve 6.11

For permutasjons-symbolet har ein følgjande

$$
\epsilon^{\alpha\beta\gamma}a^p_\alpha a^q_\beta a^r_\gamma = \begin{cases} +\det(a^j_i) & (pqr = \text{jamn permutasjon}) \\ -\det(a^j_i) & (pqr = \text{odde permutasjon} \\ 0 & (\text{to indeksar er like}) \end{cases}. \tag{68}
$$

Difor kan ein skriva

$$
\epsilon^{pqr}\det(a^j_i) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}a^p_\alpha a^q_\beta a^r_\gamma\,. \tag{69}
$$

Bruk transformasjonen $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$ slik at ein finn

$$
\epsilon^{pqr}\det(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^\beta}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^\gamma}\,. \tag{70}
$$

Frå definisjonen har ein $\bar{\epsilon}^{pqr} = \epsilon^{pqr}$ og vidare

$$
\bar{\epsilon}^{pqr} = \epsilon^{pqr} = \left[\det(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i})\right]^{-1}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^q}{\partial x^\beta}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{71}
$$

Altså transformerer permutasjons-symbolet som ein relativ kontravariant tensor av orden 3 og vekt -1.

Tilsvarande finn ein når ein ser på ϵ_{pqr}.

$$
\epsilon_{pqr}\det(a^j_i) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha_p a^\beta_q a^\gamma_r\,, \tag{72}
$$

eller

$$\epsilon_{pqr}\det(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^r}\,. \tag{73}$$

Merk at

$$\det(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}) = \left[\det(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i})\right]^{-1}\,. \tag{74}$$

Altså er ϵ_{pqr} ein relativ kovariant tensor av orden 3 og vekt +1.

Oppgåve 6.12

Vi har Stokes sats på vanleg form

$$\oint_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla\times\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} \tag{75}$$

1. Lat $\mathbf{V} = f\mathbf{a}$ der f er ein skalarfunksjon og $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor. Vi har då

   $$\nabla\times(f\mathbf{a}) = \nabla f\times\mathbf{a} \tag{76}$$

   og integrala i likning (75) kan omformast slik:

   $$\mathbf{a}\cdot\left[\oint_C f\,d\mathbf{r} - \int_S d\mathbf{S}\times\nabla f\right] = 0\,, \tag{77}$$

   Sidan $\mathbf{a}$ er ein vilkårleg vektor følgjer det at

   $$\oint_C f\,d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S}\times\nabla f\,, \tag{78}$$

   som er eit døme på Stokes integralsats for ein skalarfunksjon.

2. Lat $\mathbf{V} = \mathbf{a}\times\mathbf{g}$ der $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor og $\mathbf{g}$ er ein vektorfunksjon. Vi har då

   $$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{g}) = \mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{g} - \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{g} \tag{79}$$

   vidare har ein at

   $$(d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{g} = \nabla\mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} - d\mathbf{S}\nabla\cdot\mathbf{g} \tag{80}$$

   Ein kan då omskriva likn. (78) som

   $$\mathbf{a}\cdot\left[\oint_C \mathbf{g}\times d\mathbf{r} + \int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{g}\right] = 0\,, \tag{81}$$

   og pånytt sidan $\mathbf{a}$ er ein vilkårleg vektor følgjer det at

   $$\oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{g} = \int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{g} \tag{82}$$

I båe desse tilfella får ein resultata frå den generaliserte Stokes sin sats

$$\oint_C d\mathbf{r} * \mathbf{\Phi} = \int_S (d\mathbf{S}\times\nabla) * \mathbf{\Phi} \tag{83}$$

der $\mathbf{\Phi}$ kan vere skalar, vektor eller dyade og multiplikasjonssymbolet må veljast som vanleg multiplikasjon, skalar produkt eller vektorprodukt, slik at uttrykka gjev meining.

Oppgåve 6.13

I Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \oint \mathbf{v} d\boldsymbol{\sigma}\,, \tag{84}$$

set $\mathbf{v} = f\mathbf{a}$, der f er ein skalarfunksjon og $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor. Vi har då $\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla f$. Ein finn då

$$\mathbf{a} \cdot \left[\int_V \nabla f d\tau - \oint d\boldsymbol{\sigma} f \right] \tag{85}$$

eller

$$\int_V \nabla f d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} f \tag{86}$$

Vidare kan ein skriva ein vilkårleg dyade i ein fast ortogonal basis av einingsvektorar som $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \phi_{ij}$. Erstattar ein f i likning (86) med ϕ_{ij}, multipliserer med $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, som er ein konstant dyade og så summerer over i og j, så får ein

$$\int_V \nabla \boldsymbol{\Phi} d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Phi} \tag{87}$$

I denne dyadiske likninga kan ein finna invariantar ved å setja inn høveleg operasjon (*) slik

$$\int_V \nabla * \boldsymbol{\Phi} d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} * \boldsymbol{\Phi} \tag{88}$$

og dette er den generaliserte Gauss sats.

7 Dobbelt vektorprodukt

Lat $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vera ein orthogonal kartesisk basis og lat $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vera tre vilkårlege vektorar. Vi kan då skriva

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i\,, \tag{89}$$
$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j\,, \tag{90}$$
$$\mathbf{w} = w_k \mathbf{e}_k\,. \tag{91}$$

Vi ser på det doble vektorproduktet som kan utviklast etter formelen

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\,. \tag{92}$$

Vi skal visa formelen ved direkte utrekning:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u_i v_j w_k} (\mathbf{e_i} \times \mathbf{e_j}) \times \mathbf{e_k} \tag{93}$$

Vi reknar ut dei mogelege kombinasjonane av vektorprodukta av einingsvektorane

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_2 & \times \mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_2 & \times \mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 & \times \mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_3 \to -\mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \times \mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \times \mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_3 \to -\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \times \mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_3 & \times \mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_2
\end{array}$$

Når vi fyller ut etter skjemat ovafor får ein

$$
\begin{aligned}
u_1v_2w_1\mathbf{e}_2 &- u_1v_2w_2\mathbf{e}_1 \\
-u_2v_1w_1\mathbf{e}_2 &+ u_2v_1w_2\mathbf{e}_1 \\
+u_1v_3w_1\mathbf{e}_3 &- u_1v_3w_3\mathbf{e}_1 \\
-u_3v_1w_1\mathbf{e}_3 &+ u_3v_1w_3\mathbf{e}_1 \\
+u_2v_3w_2\mathbf{e}_3 &- u_2v_3w_3\mathbf{e}_2 \\
-u_3v_2w_2\mathbf{e}_3 &+ u_3v_2w_3\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

Desse ledda kan vi samla slik

$$
\begin{aligned}
v_1\mathbf{e}_1(u_2w_2 + u_3w_3+) \\
v_2\mathbf{e}_2(u_1w_1 + u_2w_2+) \\
v_3\mathbf{e}_3(u_1w_1 + u_2w_2+) \\
-u_1\mathbf{e}_1(v_2w_2 + v_3w_3+) \\
-u_2\mathbf{e}_2(v_1w_1 + v_3w_3+) \\
-u_3\mathbf{e}_3(v_1w_1 + v_2w_2+)
\end{aligned}
$$

Når vi adderer og subtraherer alle ledd med alle indeksar like

$$
\begin{aligned}
u_1v_1w_1\mathbf{e}_1 &- u_1v_1w_1\mathbf{e}_1 \\
+u_2v_2w_2\mathbf{e}_2 &- u_2v_2w_2\mathbf{e}_2 \\
+u_3v_3w_3\mathbf{e}_3 &- u_3v_3w_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

ser vi lett at vi får formelen (92). Q.E.D.

8 Geodesiske kurver som variasjonsproblem

Utleiing av likninga

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\dot{x}^i) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0\,. \tag{94}$$

Vi startar frå bogelengdeintegralet

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}ds \tag{95}$$

Vi ser på variasjonen av s, når vi held endepunkta fast. Vi søkjer altså den kurva som har ein ekstremalverdi med omsyn på bogelengda.

$$\delta s = \delta\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}}ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left\{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right\}}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}}ds = 0\,. \tag{96}$$

Vi ser på teljaren i siste integraletdet og finn

$$
\begin{aligned}
\delta\left\{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right\} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j}\delta x^k\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + g_{ij}\delta(\frac{dx^j}{ds})\frac{dx^i}{ds} + g_{ij}\frac{dx^j}{ds}\delta(\frac{dx^i}{ds}) \\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j}\delta x^k\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + 2g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta(\frac{dx^j}{ds})
\end{aligned} \tag{97}
$$

vidare har ein at

$$\delta(\frac{dx^j}{ds}) = \frac{d}{ds}\delta x^j \,.$$

Vi satsar vidare på å bruke delvis integrasjon og finn at uttrykket i likn. (97) kan skrivast som

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\delta x^k + 2\frac{d}{ds}(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j) - 2\frac{d}{ds}(g_{ij}\frac{dx^j}{ds})\delta x^j \,.$$

Vi finn då

$$\delta s = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - 2\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds})\right\}\delta x^k + 2\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k)}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}} ds = 0 \,. \tag{98}$$

Merk at g_{ij} er symmetrisk i indeksane i, j. Vi har vidare at

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{2\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k)}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}} ds = 0 \,.$$

Dette ser ein lett ved delvis integrasjon når ein merkar seg at $\delta x^k = 0$ i endepunkta og

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}) = 0 \,.$$

Hugs at

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \,,$$

er lengda av tangentvektoren (sjå likn. (6.113)), som er konstanten 1, når ein deriverer dette m. o. p. bogelengda er resultatet null! Vidare har ein at sidan δx^k er vilkårleg, så gjev fundamentallemmaet i variasjonsrekning at

$$\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - 2\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds})\right\} = 0 \,. \tag{99}$$

No er

$$\frac{d}{ds}g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d}{ds}x^j \,.$$

Når ein nyttar dette, kan likn. (99) skrivast som

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \,.$$

For å koma fram til dette resultatet har vi delt det eine leddet i to og forandra namn på summasjonsindeksane og brukt at $g_{ij} = g_{ji}$. Vi brukar så likn. (6.71) og finn

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \Gamma_{ij,k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \,.$$

Ytreproduktet med $g^{m\ell}$ og kontraksjon over ℓ og k gjev til slutt

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \,, \tag{100}$$

som samsvarar med likn. (6.114).