Gerhard Berge

26. november 1998

1 Oppgåver Kap. 6

1.1 Oppgåve 11

For permutasjons-symbolet har ein følgjande

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} a^p_\alpha a^q_\beta a^r_\gamma = \begin{cases} +\det(a^j_i) & (pqr = \text{jamn} \quad \text{permutasjon}) \\ -\det(a^j_i) & (pqr = \text{odde} \quad \text{permutasjon} \\ 0 & (\text{to} \quad \text{indeksar} \quad \text{er} \quad \text{like}) \end{cases} . \tag{1}$$

Difor kan ein skriva

$$\epsilon^{pqr} \det(a^j_i) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a^p_\alpha a^q_\beta a^r_\gamma \, . \tag{2}$$

Bruk transformasjonen $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$ slik at ein finn

$$\epsilon^{pqr} \det(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\gamma} \, . \tag{3}$$

Frå definisjonen har ein $\bar{\epsilon}^{pqr} = \epsilon^{pqr}$ og vidare

$$\bar{\epsilon}^{pqr} = \epsilon^{pqr} = \left[\det(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}) \right]^{-1} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, . \tag{4}$$

Altså transformerer permutasjons-symbolet som ein relativ kontravariant tensor av orden 3 og vekt -1.

Tilsvarande finn ein når ein ser på ϵ_{pqr}.

$$\epsilon_{pqr} \det(a^j_i) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha_p a^\beta_q a^\gamma_r \, , \tag{5}$$

eller

$$\epsilon_{pqr} \det(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^r} \, . \tag{6}$$

Merk at

$$\det(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}) = \left[\det(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i})\right]^{-1} . \tag{7}$$

Altså er ϵ_{pqr} ein relativ covariant tensor av orden 3 og vekt $+1$.

1.2 Oppgåve 12

Vi har Stokes sats på vanleg form

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \tag{8}$$

1. Lat $\mathbf{V} = f\mathbf{a}$ der f er ein skalarfunksjon og $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor. Vi har då

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = \nabla f \times \mathbf{a} \tag{9}$$

og integrala i likning (8) kan omformast slik:

$$\mathbf{a} \cdot \left[\oint_C f\, d\mathbf{r} - \int_S d\mathbf{S} \times \nabla f\right] = 0\,, \tag{10}$$

Sidan $\mathbf{a}$ er ein vilkårleg vektor følgjer det at

$$\oint_C f\, d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla f\,, \tag{11}$$

som er eit døme på Stokes integralsats for ein skalarfunksjon.

2. Lat $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{g}$ der $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor og $\mathbf{g}$ er ein vektorfunksjon. Vi har då

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{g}) = \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{g} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{g} \tag{12}$$

vidare har ein at

$$(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} - d\mathbf{S}\nabla \cdot \mathbf{g} \tag{13}$$

Ein kan då omskriva likn. (11) som

$$\mathbf{a} \cdot \left[\oint_C \mathbf{g} \times d\mathbf{r} + \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{g}\right] = 0\,, \tag{14}$$

og pÃ¥ny sidan $\mathbf{a}$ er ein vilkÃ¥rleg vektor fÃ¸lgjer det at

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{g} = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{g} \tag{15}$$

I bÃ¥e desse tilfella fÃ¥r ein resultata frÃ¥ den generaliserte Stokes sin sats

$$\oint_C d\mathbf{r} * \boldsymbol{\phi} = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) * \boldsymbol{\phi} \tag{16}$$

der $\boldsymbol{\phi}$ kan vere skalar vektor eller dyade og multiplikasjonssymbolet mÃ¥ veljast som vanleg multilikasjon skalar produkt eller vektorprodukt, slik at uttrykka gjev meining.

1.3 OppgÃ¥ve 13

I Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \oint \mathbf{v} d\boldsymbol{\sigma}\,, \tag{17}$$

set $\mathbf{v} = f\mathbf{a}$, der f er ein skalarfunksjon og $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor. Vi har dÃ¥ $\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla f$. Ein finn dÃ¥

$$\mathbf{a} \cdot \left[\int_V \nabla f d\tau - \oint d\boldsymbol{\sigma} f \right] \tag{18}$$

eller

$$\int_V \nabla f d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} f \tag{19}$$

Vidare kan ein skriva ein vilkÃ¥rleg dyade i ein fast ortogonal basis av eingingsvektorar som $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \phi_{ij}$. Erstattar ein f i likning (19) med ϕ_{ij}, multipliserer med $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, som er ein konstant dyade og sÃ¥ summerer over i og j, sÃ¥ fÃ¥r ein

$$\int_V \nabla \boldsymbol{\phi} d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\phi} \tag{20}$$

I denne dyadiske likninga kan ein finna invariantar ved Ã¥ setja inn hÃ¸veleg operasjon (*) slik

$$\int_V \nabla * \boldsymbol{\phi} d\tau = \oint d\boldsymbol{\sigma} * \boldsymbol{\phi} \tag{21}$$

og dette er den generaliserte Gauss sats.