



Høgskolen i Telemark

EKSAMEN

12.12. 2001

(003) M A T E M A T I K K

Tid: 5 timer (09⁰⁰ - 14⁰⁰)

Sidetall: 2

Hjelpemidler: Formelsamling og kalkulator

BOKMÅL

Oppgave 1

I denne oppgaven er funksjonen f gitt ved at: $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 6$

- a) Beregn funksjonsverdien for følgende argument (x -verdier): $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.
Finn nullpunktene til f og avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.
- b) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$. Bestem de intervallene der funksjonen f er voksende og der den er avtagende. Sett opp lokale ekstrepunkt og avgjør om noen er globale. Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn eventuelle vendepunkt.

- c) Skisser grafen til f . Finn likninga for tangenten til grafen når $x = 1$ og merk den av på graf-skissen.

Regn ut verdien A der:
$$A = \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 \left(\frac{13}{2} - 4x\right) dx$$

A kan tolkes som arealet av et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

I denne oppgaven er funksjonen g gitt ved at: $g(x) = (1 - x)e^x$

Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

Vis at $g'(x) = -xe^x$ og avgjør om grafen til g har noen ekstrepunkt.

Bestem den antideriverte funksjonen $G(x)$ til $g(x)$.

Oppgave 3

Mari har vunnet 2 000 000 kr i en TV-konkurranse. Premien blir utbetalt 1. januar 2002.

- a) Dersom Mari plasserer hele premien til 8% rente per år, hva vil da verdien av premien være etter henholdsvis 2 år og 5 år ?
Hvor lenge må premien stå urørt for at verdien skal være doblet ?
Hun kunne også tenke seg å bruke litt av premien med en gang, men ønsker dessuten å ha 2 000 000 kr tilgjengelig igjen om 3 år. Hvor mye kan Mari da bruke umiddelbart, forutsatt at resten av premien plasseres til 8% årlig rente de neste 3 årene ?
- b) Mari bestemmer seg for å "leve på premien" noen år ved å sette premieutbetalingen rett i banken og deretter ta ut like store beløp ved utgangen av hvert år i 10 år fremover. Første utbetaling skal skje om ett år, dvs. 31.12.02.
Hvor mye kan hun ta ut hvert år fremover forutsatt at renten er 8% i hele perioden ?
Mari synes disse årlige utbetalingene blir for små og velger å heller ta ut 400 000 kr hvert år fremover. Hvor lenge holder da den opprinnelige premien ?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = (x - y)(x - 1) = x^2 - xy - x + y$

- a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for h .
Vis at h har nøyaktig ett stasjonært punkt: $(1, 1)$.
- b) Klassifiser det stasjonære punktet for h .
Skisser nivåkurva $h(x, y) = 0$. Marker på skissen med plusstegn (+) de områdene der $h(x, y) > 0$, og med minustegn (÷) de områdene der $h(x, y) < 0$. Kommenter klassifiseringen av det stasjonære punktet ut fra denne fortegnsskissen.
- c) A er området i xy -planet som er avgrenset av trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1, 1)$. Sidekantene er med i A . Finn minimumspunktet for h over området A .
- d) Vi definerer en ny funksjon g ved at:

$$g(x, y) = \ln(h(x, y)) = \ln((x - y)(x - 1))$$

Skisser definisjonsområdet til g i xy -planet.

Grunngi at g ikke har noen stasjonære punkt.



Høgskolen i Telemark

EKSAMEN

12.12. 2001

(003) M A T E M A T I K K

Tid: 5 timar (09⁰⁰ - 14⁰⁰)

Sidetal: 2

Hjelpemiddel: Formelsamling og kalkulator

NYNORSK

Oppgåve 1

I denne oppgåva er funksjonen f gitt ved at: $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 6$

- a) Rekn ut funksjonsverdien for følgjande argument (x -verdiar): $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.
Finn nullpunkta til f og avgjer kor funksjonen er positiv og kor han er negativ.
- b) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$. Bestem dei intervalla der funksjonen f er veksande og der han er avtakande. Sett opp lokale ekstrepunkt og avgjer om nokon er globale. Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn eventuelle vendepunkt.

- c) Skisser grafen til f . Finn likninga for tangenten til grafen når $x = 1$ og merk han av på graf-skissa.

Rekn ut verdien A der:

$$A = \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 \left(\frac{13}{2} - 4x\right) dx$$

A kan tolkast som arealet av eit område. Merk av dette området på grafskissa.

Oppgåve 2

I denne oppgåva er funksjonen g gitt ved at: $g(x) = (1 - x)e^x$

Bestem skjæringspunkta mellom grafen til g og koordinataksane.

Vis at $g'(x) = -xe^x$ og avgjer om grafen til g har noko ekstrepunkt.

Bestem den antideriverte funksjonen $G(x)$ til $g(x)$.

Oppgave 3

Mari har vunne 2 000 000 kr i ein TV-konkurranse. Premien blir utbetalt 1. januar 2002.

- a) Dersom Mari plasserer heile premien til 8% rente per år, kva vil da verdien av premien vere etter høvesvis 2 år og 5 år ?
Kor lenge må premien stå urørt for at verdien skal vere dobla ?
Ho kunne og tenkje seg å bruke litt av premien med ein gong, men ønskjer dessutan å ha 2 000 000 kr tilgjengeleg att om 3 år. Kor mykje kan Mari da bruke umiddelbart, så sant resten av premien plasserast til 8% årleg rente dei neste 3 åra ?
- b) Mari bestemmer seg for å "leve på premien" nokre år ved å setje premieutbetalinga rett i banken og deretter ta ut like store beløp ved utgangen av kvart år i 10 år framover. Første utbetaling skal skje om eitt år, dvs. 31.12.02.
Kor mykje kan ho ta ut kvart år framover så sant renta er 8% i heile perioden ?
Mari synest desse årlege utbetalingane blir for små og vel heller å ta ut 400 000 kr kvart år framover. Kor lenge held da den opprinnelege premien ?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = (x - y)(x - 1) = x^2 - xy - x + y$

- a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for h .
Vis at h har nøyaktig eitt stasjonært punkt: $(1, 1)$.
- b) Klassifiser det stasjonære punktet for h .
Skisser nivåkurva $h(x, y) = 0$. Marker på skissa med plussteikn (+) dei områda der $h(x, y) > 0$, og med minusteikn (÷) dei områda der $h(x, y) < 0$. Kommenter klassifiseringa av det stasjonære punktet ut frå denne forteiknskissa.
- c) A er området i xy -planet som er avgrensa av trekanten med hjørne i $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1, 1)$. Sidekantane er med i A . Finn minimumspunktet for h over området A .
- d) Vi definerer ein ny funksjon g ved at:

$$g(x, y) = \ln(h(x, y)) = \ln((x - y)(x - 1))$$

Skisser definisjonsområdet til g i xy -planet.

Grunngi at g ikkje har nokon stasjonære punkt.



Høgskolen i Telemark

Institutt for informatikk og matematiske fag

FORMELSAMLING

**TIL BRUK VED
EKSAMEN
I**

(003) MATEMATIKK

2001 / 2002

UTARBEIDET AV PER CHR. HAGEN OG ROY M. ISTAD

Andregradslikning $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$

Løsninger: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, såsant $b^2 - 4ac \geq 0$

Sirkellikning $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Sirkel med radius r og sentrum i punktet (a, b) .

Derivasjon $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Potensregelen: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$, uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$$a) \quad f = k \cdot u \quad \Rightarrow \quad f' = k \cdot u' \quad (k \text{ er en konstant})$$

$$b) \quad f = u + v \quad \Rightarrow \quad f' = u' + v'$$

$$c) \quad f = u - v \quad \Rightarrow \quad f' = u' - v'$$

$$d) \quad f = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$e) \quad f = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Her er f , u og v alle funksjoner av samme variabel.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$

så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

eventuelt $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Tangentlikning $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$, der (x_1, y_1) er tangeringspunkt.

Tilvekstformelen $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \Delta x$, Δx er liten.

Elastisitet Til $y = f(x)$ defineres elastisiteten E i y mhp. x som

$$E = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Vi har at $\frac{\Delta y}{y} \approx E \cdot \frac{\Delta x}{x}$ når Δx er liten.

Potenser

Definisjoner: $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Regneregler: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ekspontensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Kjerneregel: $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Definisjon av naturlig logaritme (grunntall e):

$y = \ln x$ er det tall som e må opphøyes i for å gi x , dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

Derivert: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Kjerneregel: $f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Regneregler for logaritmer:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \quad \ln(e^x) = x$$

Definisjon av logaritme med grunntall a , der $a > 0$, $a \neq 1$:

$y = \log_a x$ er det tall som a må opphøyes i for å gi x , dvs.

$$a^y = a^{\log_a x} = x \quad (x > 0).$$

Omregningsregel for logaritmer: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Integralregning

Ubestemt integral: $\int f(x) dx = F(x) + C$, der $F'(x) = f(x)$

Regneregler: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$, $n \neq -1$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Bestemt integral:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \left| F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{der } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{der } a \leq c \leq b$$

Rekker / Finansmatematikk

Summen av en geometrisk rekke (n ledd):

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

Når $|k| < 1$, så vil $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = a \cdot \frac{1}{1 - k} = \frac{a}{1 - k}$

- Sluttverdi av beløp K_0 etter n perioder til rente r (pr. periode):

$$K_n = K_0 (1 + r)^n$$

- Nåverdi av et beløp K_n utbetalt etter n perioder til rente r (pr. periode):

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n}$$

- Oppsparingsannuitet, innbetaling ved utgangen av hver periode. Verdi umiddelbart etter siste innbetaling :

$$V = K \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

V = verdi
 K = sparebeløp
 r = rente pr. periode
 n = antall perioder

- Nåverdi av annuitet. Fast utbetaling ved utgangen av hver periode, første utbetaling ved utgangen av første periode:

$$K_0 = K \frac{(1 + r)^n - 1}{r (1 + r)^n}$$

K_0 = nåverdi
 K = utbetalt beløp
 r = rente pr. periode
 n = antall perioder

- Nedbetaling av lån (annuitet). Fast innbetaling ved utgangen av hver periode, første innbetaling en periode etter låneopptak:

$$K = K_0 \frac{r (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

K_0 = lånebeløp
 K = nedbetalingsbeløp
 r = rente pr. periode
 n = antall perioder

Funksjoner av to variabler

Funksjonen $z = f(x, y)$ beskriver en flate i rommet.

Punkt der $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 0$ kalles *stasjonære punkt*.

Klassifisering av et stasjonært punkt (a, b)

Vi definerer:

$$A = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(a,b)} = f''_{xx}(a, b) \qquad B = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(a,b)} = f''_{xy}(a, b)$$
$$C = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(a,b)} = f''_{yy}(a, b)$$

og setter $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter

1. $\Delta > 0$ og $A < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maksimum i (a, b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum i (a, b)
3. $\Delta < 0 \Rightarrow f$ har sadelpunkt i (a, b)
4. $\Delta = 0 \Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a, b)