Avdeling for allmenne fag

EKSAMEN

003 MATEMATIKK

06.06.02

Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	4 + framside
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelsamling
Merknader:	Ingen
Vedlegg:	Ingen

Eksamensresultata blir offentliggjort på følgjande internettadresse:
http://www-bo.hit.no/af/ Klikk t.d. "Eksamensplan/resultater"

eller du kan gå inn på Arena høgskole – da treng du ikkje kandidatnummer

Høgskolen i Telemark

EKSAMEN
06.06. 2002

(003) MATEMATIKK

Tid:	5 timer (09^{00} - 14^{00})
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

BOKMÅL

Oppgave 1

I denne oppgaven er funksjonen f gitt ved at: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Regn ut funksjonsverdiene for følgende argument (x-verdier): -2, 0, 2.
Faktoriser $f(x)$ mest mulig, og bruk dette til å avgjøre hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

b) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$. Bestem de intervallene der funksjonen f er voksende og der den er avtagende. Sett opp lokale ekstrempunkt og avgjør om noen er globale. Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn eventuelle vendepunkt.

c) Skisser grafen til f. Finn likningen for tangenten til grafen når $x = 0$, og merk av tangenten på graf-skissen.
Regn ut verdien A der: $A = \int_0^3 4\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx$

A kan tolkes som arealet av et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

I denne oppgaven er funksjonen g gitt ved at: $g(x) = (1+x)\,e^{-x}$

Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

Vis at $g'(x) = -x\,e^{-x}$ og bruk dette til å avgjøre om grafen til g har noen ekstrempunkt.

Bestem konstantene a og b slik at $G(x) = a + b\,e^{-x} - x\,e^{-x}$ er en antiderivert funksjon av $g(x)$ der vi har at $G(0) = 1$.

Oppgave 3

Kari har vunnet 510 000 kr i Lotto. Premien ble utbetalt 1. januar 2002.

a) Kari plasserte umiddelbart hele premien til 7 % rente per år. Hva vil verdien av premien være henholdsvis 2 år og 4 år etter innskuddet ?
Hvor lenge må premien stå urørt for at verdien skal være doblet ?
Hvor mye kunne Kari ha brukt av beløpet umiddelbart da hun fikk premien, og likevel ha hatt 510 000 kr tilgjengelig igjen om 3 år så sant resten av premiebeløpet ble plassert til 7 % årlig rente ?

b) Kari bestemte seg for å "leve på premien" noen år ved å sette premieutbetalingen rett i banken og så ta ut like store beløp ved utgangen av hvert år i 6 år fremover. Første utbetaling skal skje 31.12.02.
Hvor mye kan hun slik ta ut hvert år fremover så sant den årlige renta er på 7 % ?
Om Kari heller hadde valgt å ta ut 150 000 kr ved utgangen av hvert år fremover, hvor lenge hadde da den opprinnelige premien holdt med samme årlige rente ?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = (y - x + 1)(y + 1) = y^2 + 2y - xy - x + 1$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for h. Vis at h har nøyaktig ett stasjonært punkt: $(0\,,\,-1)$, og klassifiser dette punktet.

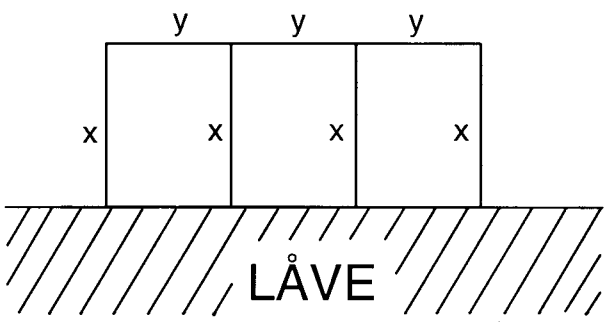
b) A er området i xy-planet som er avgrenset av trekanten med hjørner i $(0,\,-1)$, $(1\,,\,0)$ og $(1\,,\,-1)$. Sidekantene er med i A. Finn minimumspunktet for h over området A.

c) Vi definerer en ny funksjon g ved at:

$$g(x,y) = \ln\big(h(x,y)\big) = \ln\big((y - x + 1)(y + 1)\big)$$

Skisser definisjonsområdet til g i xy-planet. Avgjør om g har stasjonære punkt.

Oppgave 5



Utenfor en låve skal det ved hjelp av et nettinggjerde på 360 m lages en innhengning av 3 like store rektangelforma båser, se figuren til venstre.

Nettingen skal brukes både i ytterkant av innhengningen og til skille mellom båsene. Det skal ikke være netting på sidekantene mot låveveggen.

Bestem lengdene på sidekantene x og y slik at arealet av hver "bås" blir størst mulig.

Høgskolen i Telemark

EKSAMEN
06.06. 2002

(003) MATEMATIKK

Tid:	5 timar (09^{00} - 14^{00})
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

NYNORSK

Oppgåve 1

I denne oppgåva er funksjonen f gitt ved at: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Rekn ut funksjonsverdiane for følgjande argument (x-verdiar): -2, 0, 2.
Faktoriser $f(x)$ mest mogleg, og bruk dette til å avgjere kor funksjonen er positiv og kor han er negativ.

b) Finn $f'(x)$ og $f''(x)$. Bestem dei intervalla der funksjonen f er veksande og der han er avtakande. Sett opp lokale ekstrempunkt og avgjer om nokon er globale. Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn eventuelle vendepunkt.

c) Skisser grafen til f. Finn likninga for tangenten til grafen når $x = 0$, og merk av tangenten på graf-skissa.
Rekn ut verdien A der: $A = \int_0^3 4\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx$

A kan tolkast som arealet av eit område. Merk av dette området på grafskissa.

Oppgåve 2

I denne oppgåva er funksjonen g gitt ved at: $g(x) = (1+x)\,e^{-x}$

Bestem skjæringspunkta mellom grafen til g og koordinataksane.

Vis at $g'(x) = -x\,e^{-x}$ og bruk dette til å avgjere om grafen til g har noko ekstrempunkt.

Bestem konstantane a og b slik at $G(x) = a + b\,e^{-x} - x\,e^{-x}$ er ein antiderivert funksjon av $g(x)$ der vi har at $G(0) = 1$.

Oppgåve 3

Kari har vunne 510 000 kr i Lotto. Premien blei utbetalt 1. januar 2002.

a) Kari plasserte umiddelbart heile premien til 7% rente per år. Kva vil verdien av premien vere høvesvis 2 år og 4 år etter innskotet ?
Kor lenge må premien stå urørt for at verdien skal vere dobla ?
Kor mykje kunne Kari ha brukt av beløpet umiddelbart då ho fikk premien, og likevel ha hatt 510 000 kr tilgjengeleg att om 3 år så sant resten av premiebeløpet blei plassert til 7% årleg rente ?

b) Kari bestemte seg for å "leve på premien" nokre år ved å setje premieutbetalinga rett i banken og så ta ut like store beløp ved utgangen av kvart år i 6 år framover. Første utbetaling skal skje 31.12.02.
Kor mykje kan ho slik ta ut kvart år framover så sant den årlege renta er på 7% ?
Om Kari heller hadde vald å ta ut 150 000 kr ved utgangen av kvart år framover, kor lenge hadde da den opprinnelege premien halde med same årlege rente ?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = (y - x + 1)(y + 1) = y^2 + 2y - xy - x + 1$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for h. Vis at h har nøyaktig eitt stasjonært punkt: $(0\,,\,-1)$, og klassifiser dette punktet.

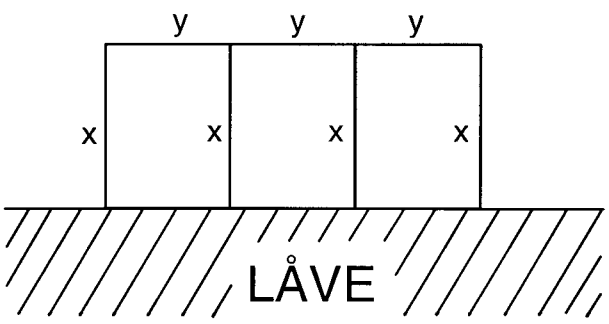
b) A er området i xy-planet som er avgrensa av trekanten med hjørne i $(0,\,-1)$, $(1\,,\,0)$ og $(1\,,\,-1)$. Sidekantane er med i A. Finn minimumspunktet for h over området A.

c) Vi definerer ein ny funksjon g ved at:

$$g(x,y) = \ln\big(h(x,y)\big) = \ln\big((y - x + 1)(y + 1)\big)$$

Skisser definisjonsområdet til g i xy-planet. Avgjer om g har stasjonære punkt.

Oppgåve 5



Utanfor ein låve skal det ved hjelp av eit nettinggjerde på 360 m lagast ei innhengning av 3 like store rektangelforma båsar, sjå figuren til venstre.

Nettingen skal brukast både i ytterkant av innhengninga og til skille mellom båsane. Det skal ikkje vere netting på sidekantane mot låveveggen.

Bestem lengdene på sidekantane x og y slik at arealet av kvar "bås" blir størst mogleg.

Høgskolen i Telemark

Institutt for informatikk og matematiske fag

FORMELSAMLING

TIL BRUK VED EKSAMEN I

(003) MATEMATIKK

2001 / 2002

UTARBEIDET AV PER CHR. HAGEN OG ROY M. ISTAD

Andregradslikning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{der} \quad a \neq 0$$

Løsninger: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{såsant} \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

Sirkellikning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Sirkel med radius r og sentrum i punktet (a, b).

Derivasjon

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Potensregelen: $$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}, \quad \text{uansett } n$$

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$a)$ $f = k \cdot u \quad \Rightarrow \quad f' = k \cdot u'$ (k er en konstant)

$b)$ $f = u + v \quad \Rightarrow \quad f' = u' + v'$

$c)$ $f = u - v \quad \Rightarrow \quad f' = u' - v'$

$d)$ $f = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$e)$ $f = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Her er f, u og v alle funksjoner av samme variabel.

Kjerneregelen: Hvis $y = f(x) = g(u)$, der $u = u(x)$

så er $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

eventuelt $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Tangentlikning

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$, der (x_1, y_1) er tangeringspunkt.

Tilvekstformelen

$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x\,, \qquad \Delta x$ er liten.

Elastisitet

Til $y = f(x)$ defineres elastisiteten E i y mhp. x som

$$E = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Vi har at $\dfrac{\Delta y}{y} \approx E \cdot \dfrac{\Delta x}{x}$ når Δx er liten.

Potenser

Definisjoner:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Regneregler:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $\quad f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e : $\quad e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.71828...$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Kjerneregel: $\quad f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Definisjon av naturlig logaritme (grunntall e):

$y = \ln x$ er det tall som e må opphøyes i for å gi x , dvs.

$e^y = e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$.

Derivert: $\quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Kjerneregel: $\quad f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Regneregler for logaritmer:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \qquad \ln(e^x) = x$$

Definisjon av logaritme med grunntall a , der $a > 0$, $a \neq 1$:

$y = \log_a x$ er det tall som a må opphøyes i for å gi x , dvs.

$a^y = a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$.

Omregningsregel for logaritmer: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Integralregning

Ubestemt integral: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, der $F'(x) = f(x)$

Regneregler:

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C\,, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C\,, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx}\,dx = \tfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C\,, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bestemt integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)\,, \quad \text{der } F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \quad \text{der } a \leq c \leq b$$

Rekker / Finansmatematikk

Summen av en geometrisk rekke (n ledd):

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

Når $|k| < 1$, så vil $S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S = a \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$

- Sluttverdi av beløp K_0 etter n perioder til rente r (pr. periode):

$$K_n = K_0(1+r)^n$$

- Nåverdi av et beløp K_n utbetalt etter n perioder til rente r (pr. periode):

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

- Oppsparingsannuitet, innbetaling ved utgangen av hver periode. Verdi umiddelbart etter siste innbetaling :

$$V = K\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

V = verdi
K = sparebeløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Nåverdi av annuitet. Fast utbetaling ved utgangen av hver periode, første utbetaling ved utgangen av første periode:

$$K_0 = K\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

K_0 = nåverdi
K = utbetalt beløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

- Nedbetaling av lån (annuitet). Fast innbetaling ved utgangen av hver periode, første innbetaling en periode etter låneopptak:

$$K = K_0\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

K_0 = lånebeløp
K = nedbetalingsbeløp
r = rente pr. periode
n = antall perioder

Funksjoner av to variabler

Funksjonen $z = f(x, y)$ beskriver en flate i rommet.

Punkt der $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x' = 0$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y' = 0$ kalles *stasjonære punkt.*

Klassifisering av et stasjonært punkt (a, b)

Vi definerer: $A = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} = f_{xx}''(a, b)$ $\quad B = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)} = f_{xy}''(a, b)$

$C = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} = f_{yy}''(a, b)$

og setter $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter

1. $\Delta > 0$ og $A < 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt maksimum i (a, b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt minimum i (a, b)
3. $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ f har sadelpunkt i (a, b)
4. $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a, b)