Høgskolen i Telemark

Avdeling for allmenne fag

EKSAMEN

I

602 LINEÆR ALGEBRA

02.05.2002

Tid:	6 timer
Målform:	Bokmål/bokmål
Sidetal:	2 + framside
Hjelpemiddel:	Alle trykte og skrevne, samt kalkulator
Merknader	Ingen
Vedlegg:	Ingen

Eksamensresultata blir offentliggjort på følgende internettadresse: http://www-bo.hit.no/af/ - klikk student

eller du kan gå inn på Arena høgskole – da trenger du heller ikke kandidatnummeret

Høgskolen i Telemark

Eksamen i Lineær algebra
Torsdag 2. mai 2002

Fagkode:	**602**
Tid:	**6 timer (9 – 15)**
Sidetall:	**2**
Hjelpemiddel:	**Alle trykte og skrevne, samt kalkulator**

Oppgave 1.

a. Gitt vektorene $\vec{v}_1 = (1,-1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,0)$ og $\vec{v}_3 = (1,2,a)$ i $\mathbf{R}^3$. Vis at $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er lineært uavhengige. Bestem a slik at $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$ blir lineært uavhengige.

b. La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 2 & -1 & c \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Det finnes bestemte verdier på b og c slik at B blir den inverse til A. Finn matriseproduktet AB (eller eventuelt BA) og bruk det til å bestemme disse verdiene på b og c.

Oppgave 2.

Gitt punktene $P_1 = (1,2,-1)$, $P_2 = (2,-1,3)$ og $Q = (3,-4,1)$ i $\mathbf{R}^3$.

a. Vis at $x - y - z = 0$ er en likning for det planet H som går gjennom P_1, P_2 og origo.

b. La L være den rette linjen som står ortogonalt på H og som går gjennom Q. Finn en parameterfremstilling for L og finn skjæringspunktet mellom L og H.

c. Finn avstanden mellom Q og H.

Oppgave 3.

Gitt vektorene $\vec{u}_1 = (1,2,-1)$, $\vec{u}_2 = (2,-1,3)$ og $\vec{v} = (3,-4,1)$ i $\mathbf{R}^3$ der vi som vanlig skal bruke prikkproduktet som indreprodukt.

a. La W være underrommet i $\mathbf{R}^3$ utspent av $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$. Finn en ortonormal basis for W. Finn $proj_W \vec{v}$, dvs. den ortogonale projeksjonen av $\vec{v}$ på W.

b. La $\vec{x} = (x,y,z)$. Den lineære operatoren $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ er gitt ved $T(\vec{x}) = proj_W \vec{x}$, dvs. $T(\vec{x})$ er den ortogonale projeksjonen av $\vec{x}$ på W. La $[T]$ være standardmatrisen til T, dvs. $[T]$ er matrisen til T med hensyn på standard basis for $\mathbf{R}^3$. Finn $[T]$.

c. La $U = W^{\perp}$, dvs. U er det ortogonale komplementet til W. Hva er dimensjonen til U ? Finn en basis for U. Finn $proj_U \vec{v}$, dvs. den ortogonale projeksjonen av $\vec{v}$ på U.

Oppgave 4.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a. Finn en basis for radrommet (linjerommet, eng: row space) til A. Finn rangen til A.

b. Finn en basis for nullrommet til A. Finn nulliteten til A.

c. Finn den generelle løsningen av likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$.

Oppgave 5.

Uttrykket $5x^2 - 4xy + 8y^2$ er en kvadratisk form i x og y.

a. La A være den symmetriske matrisen som hører til den kvadratiske formen. Finn egenverdiene til A.

b. Finn en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $P^T AP = D$.

c. Likningen $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ representerer et kjeglesnitt. Velg et variabelskifte slik at kjeglesnittet får en likning på standard form, og tegn kjeglesnittet.

Oppgave 6.

Gitt den komplekse 3×2-matrisen $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$.

a. Finn A^*, dvs. finn den konjugert transponerte matrisen til A.

b. La B være 2×2-matrisen A^*A, dvs. B er matriseproduktet av A^* og A. Finn B, egenverdiene til B og tilhørende egenvektorer.