Høgskolen i Telemark

EKSAMEN
06.05. 2003

(602) Lineær algebra

Tid:	6 timer (09^{00} - 15^{00})
Sidetall:	3
Hjelpemiddel:	Alle trykte og skrevne, samt kalkulator

Oppgave 1

La p være et reelt tall i likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ gitt ved at

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -2x & - & 3y & + & 8z & = & 7 & \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 & (*) \\ 3x & + & y & + & pz & = & 7 & \end{array}$$

a) Vis at determinanten til koeffisientmatrisa A er gitt som: $det(A) = p - 2$.

b) Sett $p = 2$ og vis hvordan likningssystemet $(*)$ løses ved hjelp av Gauss-Jordan eliminasjon. Avgjør om likningssystemet er løsbart for alle mulige verdier av p.

c) Sett $p = 2$ og bestem nullrommet til koeffisientmatrisa A, dvs. $nullrom(A)$. Hva blir rangen til koeffisientmatrisa A, dvs. $rang(A)$, for ulike p-verdier ?

Oppgave 2

Skriv om det komplekse tallet z til formen $z = x + iy$ når

$$z = \frac{8}{1 - i\sqrt{3}}$$

Bruk resultatet til å bestemme $z^{\frac{1}{2}}$ og skisser røttene i det komplekse planet.

Oppgave 3

To rette linjer L_1 og L_2 i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved

$L_1 : (x,y,z) = (0,-2,1) + u(1,-1,2)$ og $L_2 : (x,y,z) = (1,-5,-1) + v(1,1,0)$

der u og v er reelle tall.

a) Vis at de to linjene L_1 og L_2 ikke skjærer hverandre, dvs. at de ikke har noen felles punkt.

b) Bestem et punkt P_1 på L_1 og et punkt P_2 på L_2 slik at $\overrightarrow{P_1P_2}$ står vinkelrett på (er ortogonal til) både L_1 og L_2. [Svar oppgitt: $P_1 = (0,-2,1)$, $P_2 = (2,-4,-1)$]
Bestem avstanden mellom linjene L_1 og L_2.

c) Linja L_1 står vinkelrett på planet H. $S_1 = (-2,0,-3)$ er skjæringspunktet mellom linja L_1 og planet H. Finn en likning for planet H.
Vis at linja L_2 er parallell med planet H, og beregn avstanden mellom L_2 og H.

Oppgave 4

Gitt matrisa A og vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ved at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad og \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Bestem de tre egenverdiene for matrisa A. Vis at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er basisvektorer for hvert sitt egenrom, og bestem en basisvektor for egenrommet som hører til den gjenstående egenverdien for A.

b) Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer matrisa A.
Vis først hvordan dette kan brukes til å bestemme A^4, men uten å gjennomføre selve regnearbeidet, og bestem deretter A^4 ved bruk av Cayley-Hamiltons teorem.

Oppgave 5

Gitt vektormengden $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ ved at

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad og \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Grunngi at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$. Vis at tre av vektorene er innbyrdes ortogonale. Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess på $\mathcal{B}$ til å finne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 6

Gitt matrisene A og P ved at

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Vis at P ortogonalt diagonaliserer matrisa A.
Skisser kjeglesnittet som er gitt ved det kvadratiske uttrykket:

$$12x^2 - 24xy + 5y^2 + 72x - 44y = 4$$

Oppgave 7

La $\mathbb{C}^2$ ha det Euklidske indreproduktet og la operatoren $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ være gitt ved at

$$T(\vec{x}) = T(x, y) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \, , \, -\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{i}{\sqrt{2}} y \right)$$

Finn matriserepresentasjonen til T med hensyn på standardbasis i $\mathbb{C}^2$, og grunngi at denne matrisa er unitær.

Beregn : $\|\vec{x}\|$, $\|T(\vec{x})\|$ og $\|T^{20}(\vec{x})\|$ når $\vec{x} = (i, i)$.

Engelsk ordliste.

koeffisientmatrise: coefficient matrix
løsbart: consistent
nullrom: nullspace
rang: rank
kompleks: complex
skjære: intersect
felles punkt: point of intersection
avstand: distance
egenverdi: eigenvalue
egenrom: eigenspace
innbyrdes ortogonale: mutually orthogonal
(all pair of distinct vectors are orthogonal)
kjeglesnitt: conic section
indreprodukt: inner product
unitær matrise: unitary matrix