Høgskolen i Telemark

SLUTTPRØVE

5500 MATEMATIKK

14.12.2005

Tid:	9-13
Målform:	Bokmål/nynorsk
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Kalkulator, formelsamling
Merknader:	Ingen
Vedlegg:	Ingen

Eksamensresultata blir offentliggjort på nettet, via Arena høgskole. I tillegg finn du eksamensresultatlister på utsida av eksamenskontoret, men da treng du kandidatnummeret ditt, så du bør notere dette på ein lapp og legge den i lommeboka.

Avdeling for allmennvitskaplege fag,

Høgskolen i Telemark

SLUTTPRØVE
14.12. 2005

(5500) MATEMATIKK

Tid:	4 timer (09^{00} - 13^{00})
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

BOKMÅL

Oppgave 1

En funksjon f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Hva er nullpunktene til funksjonen f ?

Grunngi at funksjonen f er positiv overalt utenom i nullpunktene.

b) Bestem $f'(x)$.

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Sett opp lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

Bestem $f''(x)$.

Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn de to vendepunktene.

c) Skisser grafen til f . Bestem verdien A der

$$A = \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\, dx$$

Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.

d) Bestem likningen for tangenten T til grafen til f i punktet $(1\ ,1)$ og merk den av på grafskissen i punkt c).

Avgjør hvor *mange* løsninger likningen $f(x) = 1$ har ved å lese av på grafskissen. (NB! Du skal ikke løse likningen.)

Oppgave 2

Ved produksjon og salg av x enheter av en vare defineres en såkalt kostnadsfunksjon $K(x)$ og en inntektsfunksjon $I(x)$ ved at

$$K(x) = 2\,e^{\frac{1}{10}x} = 2\,e^{0.1\,x} \quad \text{og} \quad I(x) = \tfrac{3}{5}\,x\,, \quad \text{der} \quad 0 \leqq x \leqq 20$$

a) Vi definerer en tilhørende overskuddsfunksjon som $O(x) = I(x) - K(x)$. Grunngi at produksjon og salg av $10ln3 \approx 11$ enheter gir størst overskudd (maksimum for $O(x)$).

b) Den såkalte enhetskostnadsfunksjonen defineres ved $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Vis at $$A'(x) = \frac{(x-10)\,e^{\frac{1}{10}x}}{5x^2} = \frac{0.2(x-10)\,e^{0.1\,x}}{x^2}$$

og bestem den verdien av x som gir de laveste (minste) enhetskostnadene.

Oppgave 3

a) Om renta er 4 % årlig, hva er verdien av et innskudd på 80 000 kr, med renter og rentesrente, etter 2 år og etter 5 år ?

Hva er nåverdien av 120 000 kr utbetalt om 5 år ved 4 % årlig rente ?

Dersom det 2 år etter innskuddet på 80 000 kr blir det gjort et nytt innskudd for å sikre at det står 120 000 på kontoen etter 5 år, hva må da det nye innskuddet være ?

b) Vis at en årlig rente på 21 % svarer til en månedsrente på 1.6 % .

Et forbrukslån på 30 000 skal i følge reklamen nedbetales med 72 månedlige betalinger à 705 kr over 6 år, første betaling er en måned etter låneopptak. Kontroller at dette stemmer (i hele kr) dersom månedlig rente er 1.6 %.

Beregn verdien V av alle betalingene på et slikt lån umiddelbart etter siste betaling.

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = x^2y - y^2 - x^2 + y = (x^2 - y)(y - 1)$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for h.

b) Vis at funksjonen h har nøyaktig tre stasjonære punkt: $(-1\,,\,1)$, $(0\,,\,\frac{1}{2})$ og $(1\,,\,1)$.
Klassifiser alle de tre stasjonære punktene.

c) Finn og skisser nullnivåkurva til h, dvs. $h(x,y) = 0$
D er et område i xy-planet gitt ved at: $D = \{\,(x,\,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, \quad x^2 \leqq y \leqq 1\,\}$
Skisser området D i xy-planet og finn maksimum for funksjonen h over området D.

Høgskolen i Telemark

SLUTTPRØVE
14.12. 2005

(5500) MATEMATIKK

Tid:	4 timar (09^{00} - 13^{00})
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Formelsamling og kalkulator

NYNORSK

Oppgåve 1

Ein funksjon f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Kva er nullpunkta til funksjonen f?
Grunngi at funksjonen f er positiv overalt utanom i nullpunkta.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Sett opp lokale ekstrempunkt for f og avgjer om nokon av dei er globale.
Bestem $f''(x)$.
Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn dei to vendepunkta.

c) Skisser grafen til f. Bestem verdien A der

$$A = \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\, dx$$

Merk av det området på grafskissa som A kan seiast å vere storleiken på.

d) Bestem likninga for tangenten T til grafen til f i punktet $(1\ ,1)$ og merk han av på grafskissa i punkt c).
Avgjer kor *mange* løysingar likninga $f(x) = 1$ har ved å lese av på grafskissa.
(NB! Du skal ikkje løyse likninga.)

Oppgåve 2

Ved produksjon og sal av x einingar av ei vare definerast ein såkalla kostnadsfunksjon $K(x)$ og ein inntektsfunksjon $I(x)$ ved at

$$K(x) = 2\,e^{\frac{1}{10}x} = 2\,e^{0.1\,x} \quad \text{og} \quad I(x) = \tfrac{3}{5}\,x\,, \quad \text{der} \quad 0 \leqq x \leqq 20$$

a) Vi definerer ein tilhøyrande overskotsfunksjon som $O(x) = I(x) - K(x)$.

Grunngi at produksjon og sal av $10ln3 \approx 11$ einingar vil gi størst overskot (maksimum for $O(x)$).

b) Den såkalla einingskostnadsfunksjonen definerast ved $\quad A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Vis at $$A'(x) = \frac{(x-10)\,e^{\frac{1}{10}x}}{5x^2} = \frac{0.2(x-10)\,e^{0.1\,x}}{x^2}$$

og bestem den verdien av x som gir dei lavaste (minste) einingskostnadene.

Oppgåve 3

a) Om renta er 4 % årleg, kva er verdien av eit innskot på 80 000 kr, med renter og rentesrente, etter 2 år og etter 5 år ?

Kva er nåverdien av 120 000 kr utbetalt om 5 år ved 4 % årleg rente ?

Dersom det 2 år etter innskotet på 80 000 kr blir gjort eit nytt innskot for å sikre at det står 120 000 på kontoen etter 5 år, kva må då det nye innskotet vere ?

b) Vis at ei årleg rente på 21 % svarar til ei månadsrente på 1.6 %.

Eit forbrukslån på 30 000 skal i følgje reklamen nedbetalast med 72 månadlege betalingar à 705 kr over 6 år, første betaling er ein måned etter låneopptak. Kontroller at dette stemmer (i heile kr) dersom månadleg rente er 1.6 %.

Berekn verdien V av alle betalingane på eit slikt lån umiddelbart etter siste betaling.

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $\quad h(x,y) = x^2y - y^2 - x^2 + y = (x^2 - y)(y - 1)$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for h.

b) Vis at funksjonen h har nøyaktig tre stasjonære punkt: $(-1\,,\,1)$, $(0\,,\,\frac{1}{2})$ og $(1\,,\,1)$.
Klassifiser alle dei tre stasjonære punkta.

c) Finn og skisser nullnivåkurva til h, dvs. $h(x,y) = 0$
D er eit område i xy-planet gitt ved at: $\quad D = \{\,(x,\,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, \quad x^2 \leqq y \leqq 1\,\}$
Skisser området D i xy-planet og finn maksimum for funksjonen h over området D.